Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen.

Von

Paul Erdös in Budapest.

Einleitung.

Aus dem Primzahlsatz für die arithmetischen Progressionen folgt ohne weiteres, daß jede arithmetische Reihe, deren Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind, Primzahlen zwischen ξ und 2ξ enthält, sofern ξ eine (von der arithmetischen Progession abhängige) Schranke übersteigt. Über diese Schranke erfährt man aber aus dem Primzahlsatz nichts Näheres. Natürlich kann man den Beweis des Primzahlsatzes (es wird immer der Primzahlsatz für die arithmetischen Reihen gemeint) so verschärfen, daß man einen expliziten Ausdruck für die fragliche Schranke gewinnt; die dazu erforderlichen Berechnungen (es handelt sich um Ersetzung von O-Abschätzungen durch explizite Ungleichungen) sind aber recht kompliziert und würden eine sehr große Schranke ergeben. Für die Progressionen $3n+1$, $3n+2$, $4n+1$, $4n+3$ hat Herr Breusch[1]) die fraglichen Schranken durch funktionentheoretische Methoden bestimmt und dabei, um möglichst kleine Schranken zu bekommen, genaue zahlenmäßige Angaben über Anzahl und Lage der ersten Nullstellen der zugehörigen L-Funktionen benutzt. Sein Ergebnis lautet: für $\xi > 10^6$ liegen zwischen ξ und 2ξ stets Primzahlen einer jeden der vier oben erwähnten Progressionen; mit Hilfe der Primzahltabellen hat er alsdann die Schranke 10^6 auf 7 vermindert.

Da es sich um elementare Sätze handelt, so erscheint es wünschenswert, die tiefen Hilfsmittel des Herrn Breusch durch elementare Überlegungen (etwa vom gleichen Charakter wie diejenigen, die in der Tschebyschefschen Primzahltheorie zur Anwendung gelangen) zu ersetzen. Nun läßt sich die Methode, durch die ich den Tschebyschefschen Satz, laut dessen es zwischen ξ und 2ξ stets wenigstens eine Primzahl gibt, bewiesen habe[2]), auf den Fall der obenerwähnten arithmetischen Reihen übertragen. Durch dieselbe Methode lassen sich Sätze ähnlicher Art auch für andere arithmetische Reihen beweisen; statt ξ und 2ξ ergeben sich teilweise noch engere, teilweise aber weitere Grenzen.

[1]) Robert Breusch, Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, daß zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen, Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 505—526.

[2]) P. Erdös, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Litt. ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco Josephinae **5** (1930—1932), S. 194—198.

Der Hauptgedanke der Methode besteht darin, daß wir einen Ausdruck konstruieren, der durch alle Primzahlen, die der fraglichen Progression und dem betreffenden Intervall angehören, teilbar ist, von den übrigen Primzahlen hingegen durch möglichst wenige. Eine Abschätzung dieses Ausdruckes führt dann zum gewünschten Satz.

Im Teil I werden wir die nötigen Hilfssätze über solche Ausdrücke beweisen; im Teil II werden wir dieselben auf die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen anwenden. Um das Wesentliche der Methode klarer hervortreten zu lassen und um Wiederholungen zu vermeiden, werden wir die sich ergebenden Sätze auch dann allgemein formulieren, wenn ihre Voraussetzungen nur für einige Progressionen erfüllt werden. Im Teil III werden wir an dem Beispiel der arithmetischen Reihen $6n+1$, $6n+5$, $4n+1$, $4n+3$ zeigen, wie man die dabei auftretenden Schranken numerisch bestimmen kann. (Diese Progressionen sind im wesentlichen dieselben, wie bei Breusch; in der Tat sind die Primzahlen von der Form $3n+1$ dieselben, wie die von der Form $6n+1$; und die Primzahlen von der Form $3n+2$, außer 2, dieselben, wie die von der Form $6n+5$.) Die erhaltenen Schranken liegen in diesen Fällen übrigens tief unter 10^6.

Das Anfangsglied und die Differenz der arithmetischen Progression, um die es sich handelt, bezeichnen wir dauernd mit a bzw. d. Überhaupt sollen lateinische Buchstaben stets positive ganze Zahlen, der Buchstabe p (mit beliebigen Indizes) eine Primzahl, griechische Buchstaben stets positive Zahlen bedeuten; eine einzige Ausnahme bildet Hilfssatz 3, wobei k auch Null sein kann. Es wird stets $a < d$, $d \geqq 2$ und $(a, d) = 1$ vorausgesetzt; eine Kongruenz, deren Modul nicht angegeben ist, soll stets modulo d gelten.

I. Hilfssätze.

1. Die in der Einleitung erwähnten Ausdrücke werden mit Hilfe von Ausdrücken von der Form

$$(1) \qquad P_n(a, d) = \frac{\prod\limits_{p/d} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \prod\limits_{k=1}^{n} (a - kd)}{n!}$$

aufgebaut; wir werden zunächst einige Hilfssätze über diese Ausdrücke $P_n(a, d)$ beweisen.

Vor allem zeigen wir, daß $P_n(a, d)$ (unter der vorausgesetzten Bedingung $(a, d) = 1$) eine ganze Zahl ist. Es sei p eine beliebige Primzahl; der Zähler bzw. der Nenner von (1) sei genau durch die $U_p(n)$-te bzw. $V_p(n)$-te Potenz von p teilbar; es ist zu zeigen, daß $U_p(n) \geqq V_p(n)$.

Bekanntlich ist

$$(2)\qquad V_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots \leqq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \dots = \frac{n}{p-1},$$

also, da $V_p(n)$ eine ganze Zahl ist, $V_p(n) \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right]$, wodurch unsere Behauptung für p/d bewiesen ist. Ist aber $p \not| d$, so ist $U_p(n)$ offenbar gleich der Anzahl der durch p teilbaren Faktoren des zweiten Produktes im Zähler von (1) plus Anzahl der durch p^2 teilbaren Faktoren desselben Produktes plus usw.; nun hat aber die Kongruenz

$$(3)\qquad a + kd \equiv 0 \pmod{p^r}$$

im fraglichen Intervall $1 \leqq k \leqq n$ wenigstens $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ Lösungen in k, da jenes Intervall so viel vollständige Restsysteme mod p^r enthält; also ist auch in diesem Fall

$$U_p(n) \geqq \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots = V_p(n).$$

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen bemerken wir, daß der Ausdruck

$$(4)\qquad P_n'(a, d) = \frac{\prod\limits_{p/d} p^{\left[\frac{n-1}{p-1}\right]} \prod\limits_{k=1}^{n} (a + (k-1)d)}{n!}$$

ebenfalls ganz ist. In der Tat gilt in (2) stets das Ungleichheitszeichen, da gewiß verschwindende Glieder durch nichtverschwindende ersetzt wurden. Daher ist

$$(p-1)V_p(n) < n;\ (p-1)V_p(n) \leqq n-1;\ V_p(n) \leqq \left[\frac{n-1}{p-1}\right],$$

so daß die Primzahlen p/d im Zähler von (4) auf wenigstens so hoher Potenz enthalten sind, wie im Nenner. Für die Primzahlen $p \not| d$ gilt aber dieselbe Betrachtung wie früher, da der Umstand, daß für die Lösungen der Kongruenz (3) statt $1 \leqq k \leqq n$ das Intervall $0 \leqq k \leqq n-1$ in Frage kommt, nichts ändert.

2. Über die Größenordnung von $P_n(a, d)$ unterrichtet der

Hilfssatz 1. Es ist

$$P_n(a, d) = \alpha^{n + o(n)},$$

wobei

$$\alpha = \alpha(d) = d \prod_{p/d} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Beweis. Wegen

$$\frac{n}{p-1} - \frac{p-2}{p-1} \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right] \leqq \frac{n}{p-1}$$

und

$$kd \leqq a + kd \leqq (k+1)d$$

gilt

$$(5)\qquad \prod_{p/d} p^{-\frac{p-2}{p-1}}\left(d\prod_{p/d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n \leqq P_n(a, d) \leqq (n+1)\left(d\prod_{p/d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n,$$

und hier sind beide Schranken von der Form $\alpha^{n+o(n)}$.

3. Betreffend der zahlentheoretischen Struktur von $P_n(a, d)$ beweisen wir zwei Hilfssätze; der erste liefert eine grobe Abschätzung des Beitrages einer beliebigen Primzahl zu $P_n(a, d)$; der zweite gibt für die größeren Primzahlen über feinere Einzelheiten Rechnung.

Hilfssatz 2. Es sei $p^{W_p(n)}$ die höchste Potenz von p, die die Zahl $P_n(a, d)$ teilt. Dann ist

$$p^{W_p(n)} \leqq (n+1)\,d.$$

Beweis. Es ist $W_p(n) = U_p(n) - V_p(n)$; also, falls $t_{p^r}(n)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (3) im Intervall $1 \leqq k \leqq n$ bezeichnet, für $p \nmid d$

$$W_p(n) = \left\{t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{t_{p^2}(n) - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \ldots$$

Bestimmt man r_0 aus der Ungleichung $p^{r_0} \leqq a + nd < p^{r_0+1}$, so ist $\left[\frac{n}{p^r}\right] = t_{p^r}(n) = 0$ für $r > r_0$. Ferner ist, da das Intervall $1 \leqq k \leqq n$ aus $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ vollständigen Restsystemen mod p^r und aus einem Bruchstück des $\left[\frac{n}{p^r}\right] + 1$-ten besteht, $t_{p^r}(n) \leqq \left[\frac{n}{p^r}\right] + 1$; daher ist im Fall $p \nmid d$ $W_p(n) \leqq r_0$. Dasselbe gilt aber auch im Fall p/d, da in diesem Fall

$$\begin{aligned} W_p(n) = \left[\frac{n}{p-1}\right] - V_p(n) &\leqq \left\{\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{\frac{n}{p^2} - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \ldots \\ &\quad + \left\{\frac{n}{p^{r_0}} - \left[\frac{n}{p^{r_0}}\right]\right\} + \frac{n}{p^{r_0+1}} + \frac{n}{p^{r_0+2}} + \ldots \\ &\leqq r_0 + \frac{n}{p^{r_0}}\,\frac{1}{p-1} < r_0 + \frac{n}{a+nd}\,\frac{p}{p-1} \leqq r_0 + \frac{2}{d} \leqq r_0 + 1. \end{aligned}$$

Also ist jedenfalls

$$p^{W_p(n)} \leqq p^{r_0} \leqq a + nd \leqq (n+1)\,d.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt, daß für $p > \sqrt{(n+1)\,d}$ die Zahl $P_n(a, d)$ nicht durch p^2 teilbar sein kann; also ist sie entweder zu p teilerfremd, oder nur durch die erste Potenz von p teilbar. Der folgende Hilfssatz entscheidet für $n \geqq d$, wann die erste und wann die zweite Möglichkeit eintritt.

Hilfssatz 3. Es sei $n \geqq d$, $p > \sqrt{(n+1)\,d}$, $pb \equiv a$, $b < d$. Gehört p einem Intervall

$$(6)\qquad \frac{a+nd}{b+kd} < p \leqq \frac{n}{k}$$

an, so ist $P_n(a, d)$ nicht durch p teilbar; gehört aber p einem Intervall

$$\frac{n}{k+1} < p < \frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{7}$$

an, so ist $P_n(a, d)$ durch p teilbar (durch p^2 aber nicht).

Vorbemerkungen. Ausnahmsweise darf $k = 0$ sein; in diesem Fall soll statt (6) $p > \frac{a+nd}{b}$ gelesen werden. — Das Intervall (6) braucht nicht zu existieren, d. h. es kann $\frac{a+nd}{b+kd} > \frac{n}{k}$ sein. Das Intervall (7) existiert jedenfalls wegen

$$\frac{n}{k+1} = \frac{nd}{d+kd} < \frac{a+nd}{b+kd} < \frac{a+(n+1)d}{b+kd}. \tag{8}$$

Falls beide Intervalle existieren, dann überdecken sie sich wegen (8) teilweise; im gemeinsamen Teil

$$\frac{a+nd}{b+kd} < p < \frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{9}$$

liegt aber keine Primzahl (ja überhaupt keine ganze Zahl) p mit $pb \equiv a$; denn aus (9) würde

$$a + nd < p(b+kd) < a + (n+1)d$$

folgen, entgegen $p(b+kd) \equiv pb \equiv a$.

Beweis des Hilfssatzes 3. Wegen $p^2 > (n+1)d > n$ ist $\left[\frac{n}{p^2}\right] = \left[\frac{n}{p^3}\right] = \ldots = 0$ und $t_{p^2}(n) = t_{p^3}(n) = \ldots = 0$; daher ist, da, wegen $p > \sqrt{nd} \geqq d$, $(p, d) = 1$ ist, $W_p(n) = t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]$.

Im Falle (6) ist $k \leqq \frac{n}{p}$, also $k \leqq \left[\frac{n}{p}\right]$; ferner, da aus $a + xd \equiv 0 \pmod{p}$, d. h. $a + xd = py$

$$pb \equiv a \equiv py,$$

daher, wegen $(p, d) = 1$, $y \equiv b$ folgt, und da, wegen $p(b+kd) > a + nd$, $y < b + kd$ sein soll, so ist $t_p(n) \leqq k$; also $W_p(n) = 0$.

Dagegen ist im Fall (7) $\frac{n}{p} < k + 1$, also $\left[\frac{n}{p}\right] \leqq k$; ferner ist, wegen $p(b+kd) < a + (n+1)d$ und $p(b+kd) \equiv a$, $p(b+kd) \leqq a + nd$ und, wegen $pb \geqq p > d > a$ und $pb \equiv a$, $pb \geqq a + d$; daher sind die Zahlen

$$pb,\ p(b+d),\ \ldots,\ p(b+kd)$$

von der Form $a + xd$ mit $1 \leqq x \leqq n$ und dabei durch p teilbar; also ist $t_p(n) \geqq k + 1$, daher (wegen $W_p(n) \leqq 1$) $W_p(n) = 1$.

4. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_h$ die zu d teilerfremden Primzahlen $< d$; die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_h$ sollen durch die Bedingungen $p_l q_l \equiv a$, $q_l < d$

(für $l = 1, 2, \ldots, h$) bestimmt werden. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\Pi_n(a, d) = \frac{P_n(a, d)}{P_{\left[\frac{n}{p_1}\right]}(q_1, d)\, P_{\left[\frac{n}{p_2}\right]}(q_2, d) \ldots P_{\left[\frac{n}{p_h}\right]}(q_h, d)}.$$

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich für die Größenordnung von $\Pi_n(a, d)$ unmittelbar

Hilfssatz 4. Es ist

$$\Pi_n(a, d) = \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)},$$

wobei

$$\sigma = \sigma(d) = \sum_{\substack{p \neq d \\ p < d}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_h}.$$

Beweis:

$$\Pi_n(a, d) = \alpha^{n - \left[\frac{n}{p_1}\right] - \left[\frac{n}{p_2}\right] - \ldots - \left[\frac{n}{p_h}\right] + o(n)}$$
$$= \alpha^{n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \ldots - \frac{n}{p_h} + o(n)}$$
$$= \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}.$$

Hieraus folgt, daß $\Pi_n(a, d)$ im Falle $\sigma < 1$ mit n über alle Grenzen wächst. Unsere Methoden können nur auf diesen Fall angewandt werden. Die untenstehende Tabelle zeigt, daß diese Bedingung für alle Zahlen bis 6, für alle geraden Zahlen bis 30 und für alle durch 6 teilbaren Zahlen bis $138 = 6 \cdot 23$ erfüllt ist.

d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$
2	0,000 000	15	0,610 689	36	0,732 364	90	0,759 175
3	0,500 000	16	0,844 023	42	0,640 924	96	0,959 175
4	0,333 333	18	0,569 513	48	0,828 313	102	0,920 561
5	0,833 333	20	0,755 478	50	0,961 647	108	0,998 439
6	0,200 000	21	0,979 287	54	0,847 181	114	0,963 832
8	0,676 190	22	0,864 569	60	0,664 130	120	0,816 463
9	0,842,857	24	0,665 623	66	0,789 615	126	0,873 606
10	0,476 190	26	0,922 033	72	0,909 534	132	0,941 062
12	0,433 766	28	0,856 099	78	0,846 309	138	0,995 792
14	0,701 166	30	0,500 105	84	0,805 081	210	0,772 844

5. Die Bedeutung des Ausdrucks $\Pi_n(a, d)$ für die Primzahlen der arithmetischen Progression $a + kd$ liegt in seiner durch folgenden Hilfssatz ausgedrückten Eigenschaft.

Hilfssatz 5. Es sei $n > d^2$; dann ist $\Pi_n(a, d)$ durch keine Primzahl $p > \sqrt{(n+1)d}$ teilbar, für die nicht $p \equiv a$ gilt.

Vorbemerkung. Der Ausdruck $\Pi_n(a, d)$ braucht keine ganze Zahl zu sein. Wir sagen, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl m teilbar ist, falls sein Zähler nach Reduktion des Bruches auf kürzeste Form durch m teilbar ausfällt. Wir sagen ferner, daß ein Bruch genau durch m^r teilbar ist, falls derselbe durch m^r teilbar ist, durch m^{r+1} aber nicht. Sind die ganzen Zahlen A und B genau durch m^r bzw. durch m^s teilbar, so ist der Bruch $\frac{A}{B}$ im Falle $r > s$ genau durch m^{r-s}, im Falle $r \leqq s$ aber nicht durch m teilbar. Bestimmt man zu jeder Primzahl p den Exponent r_p so, daß der Bruch $\frac{A}{B}$ genau durch p^{r_p} teilbar ist, so ist $\frac{A}{B} \leqq \prod\limits_p p^{r_p}$; in der Tat ist $\prod\limits_p p^{r_p}$ gleich dem Zähler des in reduzierte Form gebrachten Bruches $\frac{A}{B}$.

Beweis des Hilfssatzes 5. Es sei $p > \sqrt{(n+1)d}$, $p \neq a$, $n > d^2$; dann ist $p > d$, also $(p, d) = 1$. Daher ist $pb \equiv a$ für b mit $b < d$ lösbar und es ist $b \neq 1$, $(b, d) = 1$; also ist b durch ein p_l $(l = 1, 2, \ldots, h)$ teilbar. Es sei $b = p_l c$; natürlich ist $c < d$ und, wegen $p_l q_l \equiv a \equiv pb = p p_l c$, $p_l c \equiv q_l$. Wir bestimmen die Zahl k aus der Ungleichung

$$\frac{n}{(k+1)\,p_l} < p \leqq \frac{n}{k\,p_l}.$$

Dann ist $p > \frac{1}{k+1}\left[\frac{n}{p_l}\right]$. Im Falle

$$p < \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right) d}{c + kd}$$

folgt aus Hilfssatz 3 (der wegen $d \leqq \frac{n}{d} < \frac{n}{p_l}$, also $\left[\frac{n}{p_l}\right] \geqq d$, und $p > \sqrt{\left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}$ anwendbar ist), daß $P_{\left[\frac{n}{p_l}\right]}(q_l, d)$ durch p teilbar ist; da $P_n(a, d)$ nach Hilfssatz 2 nicht durch p^2 teilbar sein kann, so ist $\Pi_n(a, d)$ nicht durch p teilbar. Im Falle

$$p \geqq \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}{c + kd} > \frac{q_l + \frac{n}{p_l}\,d}{c + kd} = \frac{p_l q_l + nd}{c\,p_l + k\,p_l d}$$

ist aber wegen $p_l q_l \geqq a$, $c\,p_l = b$

$$\frac{a + nd}{b + k\,p_l d} < p < \frac{n}{k\,p_l},$$

so daß nach Hilfssatz 3 schon $P_n(a, d)$ nicht durch p teilbar ist.

II. Sätze über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen.

6. Aus Hilfssatz 1 und 3 folgt leicht eine obere Abschätzung für das Produkt der Primzahlen von der Form $a + kd$ unter einer gegebenen

Grenze; diese Abschätzung wird uns auch im folgenden gute Dienste leisten. Diese Abschätzung wird durch den folgenden Satz ausgesprochen.

Satz 1. *Es ist für* $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq (\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)}.$$

Beweis. Es sei $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)d$; da $P_n(a, d)$ nach Hilfssatz 3 durch die Primzahlen $p \equiv a$, $n < p < a + (n+1)d$ teilbar ist und da die Primzahlen $p \equiv a$, $\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi$ wegen $n \leqq \frac{\xi - a}{d} < \frac{\xi}{d}$ und $\xi < a + (n+1)d$ unter jenen Primzahlen vorkommen, so ist nach Hilfssatz 1 für $n \to \infty$ bzw. $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq P_n(a, d) = \alpha^{n + o(n)} \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)},$$

daher ist für $\varepsilon > 0$, $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d}(1+\varepsilon)}.$$

Hieraus folgt, falls $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$ und r aus $\frac{\xi}{d^{r+1}} < \xi_0(\varepsilon) \leqq \frac{\xi}{d^r}$ bestimmt wird,

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d^2} < p \leqq \frac{\xi}{d} \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^2}(1+\varepsilon)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\prod_{\frac{\xi}{d^{r+1}} < p \leqq \frac{\xi}{d^r}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^{r+1}}(1+\varepsilon)},$$

daher

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \cdot \alpha^{\left(\frac{\xi}{d} + \frac{\xi}{d^2} + \cdots + \frac{\xi}{d^{r+1}}\right)(1+\varepsilon)} \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \cdot \alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+\varepsilon)}$$

und das ist für $\xi \geqq \xi_1(\varepsilon)$ kleiner als $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+2\varepsilon)}$.

Aus Satz 1 folgt für die Anzahl $\pi(\xi;\, a, d)$ der Primzahlen $p \equiv a$, $p \leqq \xi$ die Ungleichung

$$\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right)^{\pi(\xi;\, a, d)\, \frac{\xi}{\log^2 \xi}} \leqq \left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right)^{\pi(\xi;\, a, d) - \pi\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi};\, a, d\right)}$$

$$\leqq \prod_{\substack{\frac{\xi}{\log^2 \xi} \leqq p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)}$$

also

$$\pi(\xi;\ a,\ d) \leqq \frac{\xi}{\log^2 \xi} + \frac{\frac{\xi}{d}\log\alpha + o(\xi)}{\log\xi - 2\log\log\xi} = \frac{\log\alpha}{d}\frac{\xi}{\log\xi} + o\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right),$$

also ist, falls $\beta > \frac{\log\alpha}{d}$, für hinreichend große ξ

$$\pi(\xi;\ a,\ d) \leqq \beta\frac{\xi}{\log\xi}. \tag{10}$$

7. Im Falle $\sigma < 1$ folgt aus Hilfssatz 2, 4 und 5 als Gegenstück zum Satz 1 der folgende

Satz 2. *Ist $\sigma < 1$, so ist für $\xi \to \infty$*

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq (\alpha(d))^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}$$

Vorbemerkung. Hieraus folgt der folgende Spezialfall des klassischen Dirichletschen Satzes: Ist $(a, d) = 1$, $\sigma(d) < 1$, so gibt es unendlich viele Primzahlen von der Form $a + kd$. Aus der Tabelle auf S. 478 sieht man also, daß unsere Methode den Dirichletschen Satz unter anderen für alle arithmetischen Progressionen liefert, deren Differenz < 29 ist; nur muß man die Methode im Fall $d = 7$, 11, 13, 25 und 27 auf $2d$, im Fall $d = 17$, 19 und 23 auf $6d$ statt d anwenden.

Beweis des Satzes 2. Aus Hilfssatz 2 und 5 (vgl. auch Vorbemerkung zum letzteren) folgt für $n > d^2$

$$\begin{aligned}\Pi_n(a,d) &\leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(n+1)d}} (n+1)\,d \prod_{\substack{\sqrt{(n+1)d} \leqq p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p \\ &\leqq \{(n+1)\,d\}^{\sqrt{(n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p = \alpha^{o(n)} \prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p\end{aligned}$$

für $n \to \infty$; also, nach Hilfssatz 4,

$$\prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}.$$

Wird hier n zu gegebenem ξ aus der Ungleichung $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)\,d$ bestimmt, so folgt hieraus für $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)\left(\frac{\xi - a}{d} - 1\right) + o(\xi)} = \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}.$$

Aus Satz 2 folgt

$$\xi^{\pi(\xi;\ a,d)} > \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)},$$

also

$$\pi(\xi;\ a,\ d) \geqq \frac{1-\sigma}{d} \log\alpha \frac{\xi}{\log\xi} + o(\xi),$$

also folgt, falls $\gamma < \frac{1-\sigma}{d} \log\alpha$, für hinreichend große ξ das folgende Gegenstück zu (10):

$$\pi(\xi;\ a, d) \geqq \gamma \frac{\xi}{\log\xi}.$$

8. Kombiniert man die beiden Sätze 1 und 2, so ergibt sich

Satz 3. *Ist* $\sigma < 1$, $\lambda > \frac{d}{d-1}\frac{1}{1-\sigma}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *wenigstens eine Primzahl* $p \equiv a$ *im Intervall* $\xi < p \leqq \lambda\xi$.

Beweis. Nach Satz 1 und 2 ist für hinreichend große ξ

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)} < \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\lambda\xi + o(\xi)} \leqq \prod_{\substack{p \leqq \lambda\xi \\ p \equiv a}} p.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist der folgende

Satz 4. *Ist* $\sigma < \frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(d-1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *wenigstens eine Primzahl von der Form* $a + kd$ *im Intervall* $\xi < p \leqq 2\xi$.

Beweis. Dann ist nämlich $\sigma < \frac{1}{2} < 1$ und $\frac{d}{d-1}\frac{1}{1-\sigma} < 2$, so daß $\lambda = 2$ gewählt werden kann.

Als Spezialfälle erwähnen wir $d = 6$ und $d = 12$; im ersten Fall ist $\sigma = \frac{1}{5}$, $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{2}{5}$, im zweiten Fall aber $\sigma = 0{,}433\,766$ und dies ist kleiner als $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{5}{11} = 0{,}454\,545$. Also gibt es für hinreichend große ξ zwischen ξ und 2ξ wenigstens je eine Primzahl von der Form $6k+1$, $6k+5$, $12k+1$, $12k+5$, $12k+7$ und $12k+11$, also auch von der Form $4k+1$ und $4k+3$.

Für den Fall $d = 6$ ergibt übrigens Satz 3 die schärfere Tatsache, daß es für $\lambda > 1{,}5$ und für hinreichend große ξ wenigstens je eine Primzahl von der Form $6k+1$ und $6k+5$ im Intervall $\xi < p < \lambda\xi$ gibt.

9. Satz 4 läßt sich wie folgt verschärfen:

Satz 5. *Ist* $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{2d^2-3d-1}{2(d-1)(2d+1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *zwischen* ξ (exkl.) *und* 2ξ (inkl.) *wenigstens eine Primzahl von der Form* $a + kd$.

Beweis. Betrachten wir den Ausdruck

$$\Phi_n(a, d) = \frac{\Pi_{2n}(a, d)}{P_n(a, d)};$$

wegen Hilfssatz 1 und 4 ist für $n \to \infty$

$$\Phi_n(a, d) = \alpha^{(1-2\sigma)n + o(n)}. \tag{11}$$

Für $n > d^2$ ist $\Phi_n(a,d)$ nach Hilfssatz 5 durch keine Primzahl $p \not\equiv a$ mit $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilbar. Die Primzahlen $p \equiv a$ mit $n < p < a + (n+1)d$ und $p > \sqrt{(2n+1)d} > \sqrt{(n+1)d}$ teilen nach Hilfssatz 3 den Nenner $P_n(a, d)$, also den Ausdruck $\Phi_n(a, d)$ nicht; die Primzahlen $p \equiv a$ mit $\frac{a+2nd}{1+2d} < p \leqq n$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilen nach demselben Hilfssatz nicht einmal den Ausdruck $\Pi_{2n}(a, d)$. Also ist nach Hilfssatz 2 und Satz 1 für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\Phi_n(a, d) &\leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(2n+1)d}} (2n+1)d \prod_{\substack{\sqrt{(2n+1)d} < p \leqq \frac{a+2nd}{1+2d} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \\
&\leqq \{(2n+1)d\}^{\sqrt{(2n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq \frac{a+2nd}{1+2d} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \\
&\leqq \alpha^{\frac{a+2nd}{1+2d}\frac{1}{d-1} + o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \\
&= \alpha^{\frac{2d}{(d-1)(2d+1)}n + o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p,
\end{aligned}$$

woraus wegen (11)

$$\prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\left(1 - 2\sigma - \frac{2d}{(d-1)(2d+1)}\right)n + o(n)}$$

folgt. Der Koeffizient von n im Exponenten ist nach Voraussetzung positiv; daher ist das Produkt linker Hand für hinreichend große n nicht leer. Also gibt es für hinreichend großes n eine Primzahl $p \equiv a$ im Intervall $a + (n+1)d \leqq p \leqq a + 2nd$. Diese Primzahl liegt aber, falls man n zu gegebenem, hinreichend großem ξ aus der Ungleichung $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)d$ bestimmt, wegen $a + 2nd \leqq 2a + 2nd \leqq 2\xi$ im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$.

Satz 5 erlaubt eine unmittelbare Behandlung des Falles $d = 2$ und $d = 4$ (ohne Umweg über $d = 12$); in der Tat ist für $d = 2$

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} > 0 = \sigma,$$

und für $d = 4$ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{4}{27} = \frac{19}{54} > \frac{1}{3} = \sigma.$$

Der Fall $d = 10$ ist durch Satz 5 wegen

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{10}{189} = \frac{169}{378} < \frac{10}{21} = \sigma$$

noch nicht erledigt.

10. Falls $1 + 2d$ keine Primzahl ist, so läßt sich Satz 5 noch weiter verschärfen. In der Tat ist dann notwendig $d > 3$, also $1 + 2d < d^2$, so daß $1 + 2d$ durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_h$ teilbar ist Für diesen Fall gilt aber der

Satz 6. *Ist, für ein* $l = 1, 2, \ldots, h$, $p_l / 1 + 2d$ *und* $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p_l(d-1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *zwischen* ξ (exkl.) *und* 2ξ (inkl.) *wenigstens eine Primzahl* $p \equiv a$.

Beweis. Es sei $1 + 2d = p_l b$; wegen $3d > 1 + 2d = p_l b \geqq 3b$ ist $b < d$; wegen $a b p_l \equiv a \equiv p_l q_l$ ist $q_l \equiv ab$. Daher ist $\Phi_n(a, d)$ für $n > d^2 > d$, $p > \sqrt{(2n+1)d} > \sqrt{\left(\left[\frac{2n}{p_l}\right] + 1\right)d}$ wegen Hilfssatz 3 durch keine Primzahl $p \equiv a$ mit $\left[\frac{2n}{p_l}\right] < p < \frac{q_l + \left(\left[\frac{2n}{p_l}\right]+1\right)d}{b}$ teilbar; und hier ist

$$\frac{q_l + \left(\left[\frac{2n}{p_l}\right]+1\right)d}{b} > \frac{q_l + \frac{2n}{p_l}d}{b} = \frac{p_l q_l + 2nd}{b p_l} \geqq \frac{a + 2nd}{1 + 2d}.$$

Nach den Überlegungen beim Beweis des Satzes 5 ist also $\Phi_n(a, d)$ durch keine Primzahl $p \equiv a$ mit $p > \frac{2n}{p_l}$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilbar. Wegen Hilfssatz 2 und Satz 1 ist also für $n \to \infty$

$$\Phi_n(a,d) \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(2n+1)d}} \{(2n+1)d\} \prod_{\substack{\sqrt{(2n+1)d} < p \leqq \frac{2n}{p_l} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p$$

$$\leqq \alpha^{\frac{2n}{p_l(d-1)} + o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p.$$

Hieraus und aus (11) folgt wegen $1 - 2\sigma > \frac{2}{p_l(d-1)}$, daß das letzte Produkt nicht leer ist; hieraus folgt aber die Behauptung in gleicher Weise, wie beim Satz 5.

Im Fall $d = 10$ ist $1 + 2d = 21$, also kann man $p_l = 7$ wählen (natürlich ist es zweckmäßig, p_l möglichst groß zu wählen); in diesem Falle ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{p_l(d-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{63} = \frac{61}{126} > \frac{10}{21} = \sigma(10)$. Also gibt es für hinreichend große ξ im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$ stets wenigstens je eine Primzahl von der Form $10k+1$, $10k+3$, $10k+7$ und $10k+9$.

Analog kann man Satz 5 im Fall verschärfen, falls $1+d$ keine Primzahl ist. Eine weitere Verschärfungsmöglichkeit liegt im Fall $p_l/1+2d$ in der Tatsache, daß nach Hilfssatz 3 die Primzahlen $p \equiv a$ mit $\frac{a+2nd}{b+p_l d} < p \leqq \frac{2n}{p_l}$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ den Ausdruck $\Phi_n(a, d)$ wiederum nicht teilen; durch weitere Voraussetzungen kann man das Intervall, dessen Primzahlen $p \equiv a$ diesen Ausdruck nicht teilen, noch weiter ausdehnen. Man sieht aber unmittelbar ein, daß in dieser Weise nur solche Sätze entstehen können, die nur im Fall $\sigma < \frac{1}{2}$ anwendbar sind, in der Tat konvergiert im Fall $\sigma > \frac{1}{2}$ der Ausdruck $\Phi_n(a, d)$ gegen Null für $n \to \infty$. In einer späteren Publikation beabsichtigen wir eine wesentliche Verschärfung der hier angewandten Methode zu entwickeln, die sich auch in gewissen Fällen, wo $\sigma(d) > \frac{1}{2}$ ist (z. B. für $d = 8$) anwenden läßt.

III. Über die numerische Bestimmung der Schranken.

11. Es ist leicht zu sehen, daß sich alle im Vorangehenden vorgekommenen o-Abschätzungen durch explizite Ungleichungen ersetzen lassen; zu diesem Zweck wendet man statt Hilfssatz 1 die expliziten Ungleichungen (5) an. Also sind die Schranken, von welchen an unsere Sätze gelten, prinzipiell in jedem Fall leicht zu ermitteln.

Insbesondere ergibt der Beweis des Satzes 1 eine explizite obere Schranke von der Form $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}+o(\xi)}$ für das Produkt $\prod\limits_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p$. Nur ist aber diese Schranke für numerische Berechnungen nicht sehr geeignet, da sie zu groß ist; daher werden wir die folgende „numerische" Form des Satzes 1 anwenden:

Satz 7. *Es ist für* $\xi \geqq 1$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d\,\xi\,(\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1}}. \tag{12}$$

Beweis. Wir betrachten den Ausdruck (4), welcher, wie wir gesehen haben, eine ganze Zahl repräsentiert. Wegen

$$P'_n(a,d) \leqq \prod_{p/d} p^{\frac{n-1}{p-1}} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} kd = d^n \Big(\prod_{p/d} p^{\frac{1}{p-1}}\Big)^{n-1}$$

und wegen der Tatsache, daß $P'_n(a, d)$ durch alle Primzahlen $p \equiv a$ mit $n < p < a + nd$ teilbar ist, gilt die Ungleichung

$$\prod_{\substack{n < p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^n\,\delta^{n-1}$$

mit

$$\delta = \delta(d) = \frac{1}{d}\,\alpha(d) = \prod_{p|d} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ersetzt man hier n der Reihe nach durch $n_1 = \left\{\frac{n}{d}\right\}$, $n_2 = \left\{\frac{n}{d^2}\right\}, \ldots,$ $n_r = \left\{\frac{n}{d^r}\right\} = 1$, wobei $d^{r-1} < n \leqq d^r$ und $\{\eta\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqq \eta$ bezeichnt, so erhält man durch Multiplikation der so entstehenden Ungleichungen und Berücksichtigung der Beziehungen

$$a + n_{k+1}d \geqq 1 + n_{k+1}d \geqq 1 + \frac{n}{d^{k+1}}\,d = 1 + \frac{n}{d^k} > n_k$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r; \quad n_0 = n)$$

die Ungleichung

$$\prod_{\substack{p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^{n+n_1+n_2+\ldots+n_r}\,\delta^{n+n_1+n_2+\ldots+n_r-r-1}.$$

Wegen

$$n + n_1 + n_2 + \ldots + n_r \leqq n + \frac{n+d-1}{d} + \frac{n+d^2-1}{d^2} + \ldots + \frac{n+d^r-1}{d^r}$$
$$= (n-1)\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \ldots + \frac{1}{d^r}\right) + (r+1)$$
$$< \frac{(n-1)\,d}{d-1} + r + 1$$

ist also

$$\prod_{\substack{p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\, d^{r+1}\, \delta^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}$$
$$= \alpha^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\, d^{r-1}\, d^2 \leqq \alpha^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\,(n-1)\,d^2.$$

Es sei nun $\xi \geqq a$ und n aus der Ungleichung $a + (n-1)\,d \leqq \xi < a + n\,d$ bestimmt; dann ist um so mehr $(n-1)\,d < \xi$, also

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d\,\xi\,\alpha^{\frac{\xi}{d-1}},$$

dies gilt aber offenbar auch für $1 \leqq \xi < a$.

Für spezielle numerische Werte von d (insbesondere für $d = 2, 4, 6$) könnte man Satz 7 leicht noch verschärfen, so daß an der linken Seite der Ungleichung (12) auch der Faktor ξ für hinreichend große ξ nicht mehr auftritt; für unsere Zwecke wird jedoch Satz 7 scharf genug sein.

12. Bei Bestimmung der Schranke ξ_0 für ξ, von welcher ab es zwischen ξ und $2\,\xi$ wenigstens eine Primzahl $p \equiv a$ gibt, empfiehlt es sich, auch

in den durch Satz 4 erledigten Fällen das beim Beweise der Sätze 5 und 6 angewandte Verfahren heranzuziehen und das Intervall, welches keine Primzahl $p \equiv a$ enthält, die den Ausdruck $\Phi_n(a, d)$ teilt, möglichst weit auszudehnen.

Die Methode zur Bestimmung der Schranken werden wir für die Fälle $d = 6$ und $d = 4$ darlegen. Es kommt für uns nicht darauf an, die Schranken soweit wie möglich herabzusetzen; eine weitere Verminderung dieser Schranken könnte man einerseits durch vorsichtigere Abschätzung, andererseits durch Anwendung der zu Ende von 11. erwähnten Verschärfungen des Satzes 7 und endlich durch Anwendung einer ebenso scharfen Abschätzung des Beitrages von kleinen Primzahlen (d. h. von Primzahlen $p \leqq \sqrt{6(2n+1)}$ bzw. $p \leqq \sqrt{4(2n+1)}$) zu den Ausdrücken $\Phi_n(a, d)$ erzielen, wie etwa die durch Satz 7 gelieferte Abschätzung.

13. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $d = 6$, d. h. den Fall der Primzahlen von der Form $6k+1$ und $6k+5$. p' soll Primzahlen von der Form $6k+1$, p'' aber Primzahlen von der Form $6k+5$ bezeichnen; es sei zur Abkürzung $P_n' = P_n(1, 6)$, $P_n'' = P_n(5, 6)$ und

$$\Phi_n' = \frac{P_{2n}'}{P_n' P''_{\left[\frac{2n}{5}\right]}}, \quad \Phi_n'' = \frac{P_{2n}''}{P_n'' P'_{\left[\frac{2n}{5}\right]}}$$

gesetzt. (Diese Abkürzungen gelten nur in diesem Abschnitt 13.) Dann ist nach der Ungleichung (5)

$$\left.\begin{matrix}\Phi_n' \\ \Phi_n''\end{matrix}\right\} \geqq 3^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{-1}\left(\left[\frac{2n}{5}\right]+1\right)^{-1}\alpha^{2n-n-\left[\frac{2n}{5}\right]}$$
$$\geqq 3^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{-1}\left(\frac{2n}{5}+1\right)^{-1}\alpha^{\frac{3}{5}n} \qquad \left(\alpha = 6\cdot 2\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^2\, 3^{\frac{3}{2}}\right).$$

Es sei $n > 36$; dann ist $\sqrt{6(2n+1)} < \sqrt{6\cdot 3n} < 5\sqrt{n} < \frac{5}{6}n < \frac{12}{13}n$. Ist $n < p' < 6n+7$, so ist nach Hilfssatz 3 p'/P_n'; ist $\frac{12n+1}{13} < p' \leqq n$, so ist nach demselben Hilfssatz $p' \nmid P_{2n}'$; also ist Φ_n' durch die Primzahlen $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+7$ jedenfalls nicht teilbar. Analog sieht man, daß Φ_n'' durch die Primzahlen $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+11$ nicht teilbar ist. Also ist nach Hilfssatz 2 und 5

$$\Phi_n' \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p' \prod_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p'$$

$$\Phi_n'' \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p'' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \prod_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p''.$$

Nun ist aber

$$\prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) = (12n+6)^{\pi(\sqrt{12n+6})}$$

und, wegen Satz 7,

$$\left.\begin{array}{r} \prod\limits_{p' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \end{array}\right\} \leqq \tfrac{72}{13}(n+1)\,\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)} \leqq 6(n+1)\,\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)},$$

so daß

$$\left.\begin{array}{r} \prod\limits_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p' \\ \prod\limits_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p'' \end{array}\right\} \geqq \alpha^{\frac{27n-12}{65}} 6^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} (n+1)^{-2} \left(\frac{2}{5}n+1\right)^{-1} \cdot (12n+6)^{-\pi(\sqrt{12n+6})}$$

$$= 10\alpha^{\frac{27n-77}{65}} (n+1)^{-2}(2n+5)^{-1}(12n+6)^{-\pi(\sqrt{12n+6})}.$$

Ist also eines der Produkte $\prod\limits_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p'$ und $\prod\limits_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p''$ leer, so ist

$$\alpha^{\frac{27n-77}{65}} \leqq \tfrac{1}{10}(n+1)^2(2n+5)(12n+6)^{\pi(\sqrt{12n+6})} < (12n+6)^{3+\pi(\sqrt{12n+6})},$$

also, falls $n \geqq 90$, wegen $\frac{27n-77}{65} \geqq \frac{26n+13}{65} = \frac{2n+1}{5}$,

$$\alpha^{\frac{2n+1}{5}} \leqq (12n+6)^{3+\pi(\sqrt{12n+6})},$$

d. h. wegen $\alpha = 2^2 3^{\frac{3}{2}} > 2^4$

$$(13) \qquad 2^{8n+4} < (12n+6)^{15+5\pi(\sqrt{12n+6})}.$$

Nun ist aber, für $\mu > 63$, $\pi(\mu) < \frac{\mu}{3} - 3$.[3]) Es ist daher für $\sqrt{12n+6} > 63$, d. h. für $n > 330$, wegen $1 + x \leqq 2^x$

$$(12n+6)^{15+5\pi(\sqrt{12n+6})} < (12n+6)^{\frac{5}{3}\sqrt{12n+6}}$$

$$= \left(\sqrt[6]{12n+6}\right)^{10\sqrt{12n+6}} < \left(1 + \left[\sqrt[6]{12n+6}\right]\right)^{10\sqrt{12n+6}}$$

$$\leqq 2^{10\sqrt{12n+6}\,\left[\sqrt[6]{12n+6}\right]} \leqq 2^{10(12n+6)^{\frac{2}{3}}}.$$

Also würde aus (13) folgen

$$\frac{2}{3}(12n+6) < 10(12n+6)^{\frac{2}{3}},\ (12n+6)^{\frac{1}{3}} < 15,$$

was für $n > 330$ unrichtig ist. Daher gibt es für $n > 330$ eine Primzahl p' mit $6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1$ und eine Primzahl p'' mit $6n+11 \leqq p''$

[3]) Man verifiziert diese Ungleichung für $63 < \mu \leqq 69$, und folgert dann allgemein für $\mu > 63$ aus dem Umstande, daß von sechs konsekutiven Zahlen > 3 höchstens zwei Primzahlen sein können.

$\leqq 12n+5$. Diese Primzahlen liegen im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$, falls n zu ξ aus der Ungleichung $6n+1 \leqq \xi < 6n+7$ bzw. $6n+5 \leqq \xi < 6n+11$ bestimmt wird. Dieses n fällt für $\xi \geqq 2000$ in beiden Fällen > 330 aus; daher erhalten wir den

Satz 8. *Für* $\xi \geqq 2000$ *gibt es zwischen* ξ (exkl.) *und* 2ξ (inkl.) *je eine Primzahl von der Form* $6k+1$ *und* $6k+5$.

14. In diesem Abschnitt führen wir die Schrankenbestimmung für den Fall $d = 4$, also für den Fall der Primzahlen von der Form $4n+1$ und $4n+3$ durch. p' bzw. p'' sollen Primzahlen von der Form $4k+1$ bzw. $4k+3$ bezeichnen; es sei zur Abkürzung $P'_n = P_n(1, 4)$, $P''_n = P_n(3, 4)$ und

$$\Phi'_n = \frac{P'_{2n}}{P'_n \, P''_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}, \quad \Phi''_n = \frac{P''_{2n}}{P''_n \, P'_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}.$$

Hier ist $\alpha = 4 \cdot 2 = 8$, also nach der Ungleichung (5)

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\Phi'_n \\ \Phi''_n\end{matrix}\right\} &\geqq (n+1)^{-1}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)^{-1} 8^{2n-n-\left[\frac{2n}{3}\right]} \\ &\geqq 3\,(n+1)^{-1}\,(2n+3)^{-1}\,8^{\frac{n}{3}} = 3\,(n+1)^{-1}\,(2n+3)^{-1}\,2^n. \end{aligned}$$

Es sei $n \geqq 81$; dann ist $2\sqrt{2n+1} < 4\sqrt{n} < \frac{4n}{9} < \frac{8n}{17}$. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß für $n < p' < 4n+5$ p' / P'_n, für $\frac{8n+1}{9} < p' \leqq n$ $p' \not/ P'_{2n}$, für $\left[\frac{2n}{3}\right] < p' \leqq \frac{8n+1}{9}$ $\left(\text{wegen } \frac{8n+1}{9} < \frac{3+4\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)}{3}\right)$ $p' / P''_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, für $\frac{n}{2} < p' \leqq \left[\frac{2n}{3}\right]$ $\left(\text{wegen } \left[\frac{2n}{3}\right] \leqq \frac{2n}{3} < \frac{1+4(n+1)}{5}\right)$ p' / P'_n und endlich für $\frac{8n+1}{17} < p' \leqq \frac{n}{2}$ $p' \not/ P'_{2n}$. Daher ist Φ'_n für $\frac{8n+1}{17} < p' < 4n+5$ nicht durch p' teilbar; analog sieht man ein, daß Φ''_n für $\frac{8n+3}{17} < p'' < 4n+7$ nicht durch p'' teilbar ist. Daher ist nach Hilfssatz 2 und 5 jedenfalls

$$\Phi'_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4\,(2n+1) \prod_{p' < \frac{8}{17}(n+1)} p' \prod_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p',$$

$$\Phi''_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4\,(2n+1) \prod_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p'' \prod_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''.$$

Hier ist aber

$$\prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4\,(2n+1) = (8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})}$$

und, wegen Satz 7,

$$\left.\begin{array}{r}\prod\limits_{p' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p''\end{array}\right\} \leqq \frac{32}{17}(n+1)\, 2^{\frac{8}{17}(n+1)} < (n+1)\, 2^{\frac{8n+25}{17}},$$

also

$$\left.\begin{array}{r}\prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p' \\ \prod\limits_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''\end{array}\right\} \geqq 2^{\frac{9n-25}{17}}\, 3\,(n+1)^{-2}(2n+3)^{-1}(8n+4)^{-\pi(\sqrt{8n+4})}.$$

Ist also das eine oder das andere der Produkte $\prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p'$ und $\prod\limits_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''$ leer, so ist

$$\begin{aligned} 2^{\frac{9n-25}{17}} &\leqq \frac{1}{3}(n+1)^2\,(2n+3)\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} \\ &= (n+1)^2\left(\frac{2}{3}n+1\right)(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} < (n+1)^3\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} \\ &< (2n+1)^3\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} = 2^{-6}\,(8n+4)^{3+\pi(\sqrt{8n+4})}, \end{aligned}$$

d. h.

$$2^{\frac{9n+77}{17}} < (8n+4)^{3+\pi(\sqrt{8n+4})}; \tag{14}$$

wegen $n \geqq 4$ gilt also $2^{\frac{9n}{17}} < (9n)^{3+\pi(\sqrt{9n})}$.

Nun ist aber für $\mu > 63$ $\pi(\mu) < \frac{\mu}{3} - 3$, daher ist für $3\sqrt{n} > 63$, $n > 441$, $2^{\frac{9n}{17}} < (9n)^{\sqrt{n}}$.

Nun folgt aus $2^x > 2 + 2x$ (für $x > 3$)

$$2^{\sqrt[6]{n}} \geqq 2^{[\sqrt[6]{n}]} > 2 + 2\,[\sqrt[6]{n}] > 2\sqrt[6]{n},$$

$$2^{\sqrt[6]{n}} > 64\,n > 9\,n, \qquad \text{(wenn } n > 729\text{)},$$

d. h.

$$2^{\frac{9n}{17}} < 2^{6n^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{also} \quad 9n < 102\,n^{\frac{2}{3}},$$

dies ist aber offenbar unrichtig für alle $n > \left(\frac{102}{9}\right)^3$, also a fortiori für $n > 1460$.

Für $n > 1460$ gibt es also je eine Primzahl p' und p'' mit

$$4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1, \quad 4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3.$$

Falls man n zu gegebenem ξ aus der Ungleichung $4n+1 \leqq \xi < 4n+5$ bzw. $4n+3 \leqq \xi < 4n+7$ bestimmt, so gehören diese p' und p'' dem Intervall $\xi < p \leqq 2\,\xi$ an; für $\xi \geqq 6000$ gilt dann in beiden Fällen $n > 1460$.

Also haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 9. *Für* $\xi \geqq 6000$ *gibt es im Intervall* $\xi < p \leqq 2\,\xi$ *je eine Primzahl von der Form* $4\,k+1$ *und* $4\,k+3$.

15. Mit Hilfe der Primzahltabellen bestimmt man nun leicht die genauen unteren Grenzen von ξ, von welchen ab zwischen ξ (exkl.) und $2\,\xi$ (inkl.) Primzahlen von den betrachteten Formen existieren. Man findet, daß das Intervall $\xi < p \leqq 2\,\xi$ für $\xi \geqq 3{,}5$ eine Primzahl von der Form $6\,k+1$, für $\xi \geqq 5{,}5$ eine Primzahl von der Form $6\,k+5$, für $\xi \geqq 6{,}5$ eine Primzahl von der Form $4\,k+1$ und endlich für $\xi \geqq 3{,}5$ eine Primzahl von der Form $4\,k+3$ enthält. Aus der letzten Tatsache folgt auf Grund eines bekannten Satzes der elementaren Zahlentheorie, daß $1!$, $2!$ und $6!$ die einzigen Faktoriellen sind, die sich in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen lassen.

Zum Schluß sei es mir erlaubt, dem Herrn Privatdozenten Dr. L. Kalmár (Szeged), der durch seine wertvolle Hilfe das Erscheinen dieser Arbeit ermöglichte, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Zusatz, hinzugefügt am 30. August 1934.

Nach Eingang des Manuskriptes vorliegender Arbeit bei der Redaktion sind die beiden interessanten Arbeiten des Herrn Giovanni Ricci [Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **12** (1933), S. 304—309 und Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica, *ebenda* **13** (1934), S. 1—11] erschienen, in denen verwandte Resultate wie in dieser Arbeit sehr elegant erreicht worden sind. Auch die Methode des Herrn Ricci weist Ähnlichkeiten mit der in dieser Arbeit benutzten auf, erfordert aber genauere Kenntnisse über die Verteilung der Primzahlen.

(Eingegangen am 11. September 1932.)