wobei jetzt die Blätter ε^4 außerhalb der Klammern als Skalare zu betrachten sind.

Daher ist die Gl. (51) völlig mit Gl. (55) äquivalent.

Jede Tangentialebene an die Fläche $\xi\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}\xi = 0$ *schneidet somit die drei Kernflächen* $x\mathfrak{A}x = 0$, $x\mathfrak{B}x = 0$ *und* $x\mathfrak{C}x = 0$ *in drei Kegelschnitten, von denen nach S. 85/86 jeder apolar ist zu der harmonischen Kurve, welche zu den beiden anderen gehört.*

Es bildet *dieser* bisher offenbar nicht beachtete *Satz ein zweites räumliches Gegenstück zur harmonischen Kurve v. Staudts in der ebenen Geometrie.* Insbesondere für $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ findet man zugleich als Deutung der Fläche $\xi\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{\mathrm{II}}\}\xi = 0$: „Jede Tangentenebene an diese Fläche schneidet die Quadriken $x\mathfrak{A}x = 0$ und $x\mathfrak{B}x = 0$ in 2 Kegelschnitten, welche bei ebener Betrachtung zu einander apolar sind", da ja nunmehr $\{\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{C}}\}$ in $\{\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}^{\mathrm{II}}\}$ übergeht.

4. Zu *vier* unabhängigen Quadriken gehört endlich noch die skalare Invariante $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\}$ und im Falle ihres Verschwindens wird z. B.

$$\begin{aligned}(56)\qquad \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\} &= \sum_{\mathfrak{i}} \mathfrak{A}\varepsilon_{\mathfrak{i}} \cdot \{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\}\varepsilon^{\mathfrak{i}} = \sum_{\mathfrak{i}} \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}E_{\mathfrak{i}} \cdot \{\mathfrak{C}\mathfrak{D}\}E^{\mathfrak{i}} \\ &= \sum_{\mathfrak{i}} \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\}\varepsilon_{\mathfrak{i}} \cdot \mathfrak{D}\varepsilon^{\mathfrak{i}} = 0.\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber nach S. 82, Gl. (20):

Die hierdurch einander zugeordneten Paare reziproker Polarsysteme, bzw. Kerngebilde, sind zu einander apolar.

(Eingegangen: 21. 3. 1957)

Erdös, Paul
Jahresbericht d. DMV
Bd. 60 (1957), S. 89–92

Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer-König.

Von PAUL ERDÖS in Birmingham

Diese Note knüpft an eine frühere Arbeit von Gaier und Meyer-König [1] in dieser Zeitschrift an. Die Verfasser betrachten dort hauptsächlich Potenzreihen von der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ regulär und nicht beschränkt in } |z| < 1$$

(globale Voraussetzung), und untersuchen das Problem, zusammen mit gewissen Angaben über die Koeffizienten von $f(z)$ Aussagen zu machen über die Existenz und Lage einzelner „Singularitäten" von $f(z)$ auf $|z| = 1$ (lokale Aussagen). Der hierbei verwendete Singularitätenbegriff unterscheidet sich vom gewöhnlichen und drückt, grob gesprochen, lokale Unbeschränktheit von $f(z)$ in der Nähe von $|z| = 1$ aus. Präzise gesagt heißt der Punkt $z_0 = e^{i\varphi_0}$ *regulärer Endpunkt für* $f(z)$, wenn $f(z)$ für ein $\varepsilon > 0$ im Sektor $\varphi_0 - \varepsilon < \arg z < \varphi_0 + \varepsilon, 0 < |z| < 1$ beschränkt ist; andernfalls heißt z_0 *singulärer Endpunkt für* $f(z)$.

Bei Zugrundelegung dieses Singularitätenbegriffs lassen sich nun manche für den gewöhnlichen Singularitätenbegriff geltende Sätze für Potenzreihen übertragen (z. B. der Satz von Vivanti-Pringsheim oder der Hadamardsche Lückensatz), andere Sätze dagegen nicht (z. B. der Satz von Pólya-Carlson). Ungelöst war bisher noch die Frage, ob eine Übertragung des bekannten Lückensatzes von Fabry möglich ist oder nicht. Im folgenden soll diese Frage in negativem Sinne beantwortet werden. Wir beweisen nämlich den

Satz. *Es gibt eine Potenzreihe* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *vom Konvergenzradius* 1 *mit*

$$n_{k+1} - n_k \to \infty \quad (k \to \infty), \quad a_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \tag{1}$$

derart, daß alle Punkte $z \neq 1$ *auf* $|z| = 1$ *reguläre Endpunkte für* $f(z)$ *sind.*

Beweis. Es bezeichne

$$f_k(z) = 1 + z^{p_k} + z^{2p_k} + \cdots + z^{m_k p_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

wobei p_k die k-te Primzahl bedeutet, während $\{m_k\}$ eine weiter unten festgelegte Folge hinreichend stark und monoton gegen Unendlich wachsender natürlicher Zahlen ist. Dann hat bei geeigneter Wahl von $\{m_k\}$ die Funktion

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{m_k p_k} f_k(z)}{k(m_k + 1)} \tag{2}$$

alle im Satz behaupteten Eigenschaften.

Die Eigenschaften (1) sind nämlich offensichtlich erfüllt, sobald nur $\{m_k\}$ so gewählt ist, daß

$$m_{k+1} p_{k+1} - 2 m_k p_k \to \infty \quad (k \to \infty) \tag{3}$$

gilt. Es ist also noch nachzuprüfen, daß bei geeigneter Wahl von $\{m_k\}$ jeder Punkt $z \neq 1$ auf $|z| = 1$ regulärer Endpunkt von (2) ist.

Dazu bemerken wir, daß ein Abschnitt $h(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ der geometrischen Reihe in der Nähe von $z = 1$ wie folgt abgeschätzt werden kann. Es gilt

$$|h(z)| = \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right| \leqq \frac{2}{|z-1|} \leqq \sqrt{n}\,, \text{ sobald } |z-1| \geqq 2/\sqrt{n} \text{ und } |z| \leqq 1$$

ist, also gewiß für alle $z = re^{i\varphi}$ mit $r \leqq 1$ und $|\varphi| > c/\sqrt{n}$ mit einer absoluten Konstanten $c > 0$. Daher haben wir für $f_k(z)$ die Abschätzung

$$|f_k(z)| = |1 + (z^{p_k}) + (z^{p_k})^2 + \cdots + (z^{p_k})^{m_k}| \leqq \sqrt{m_k} \qquad (z = re^{i\varphi}),$$

sofern $r \leqq 1$ und $|p_k\varphi - a \cdot 2\pi| > c/\sqrt{m_k}$, also

$$\left|\varphi - \frac{a\cdot 2\pi}{p_k}\right| > \frac{c}{p_k\sqrt{m_k}} \text{ für jede ganze Zahl } a$$

gilt.

Nun bezeichnen wir für ein weiterhin festgehaltenes $\delta > 0$ die Menge der $z = re^{i\varphi}$ mit $0 < r < 1$, $|\varphi| \not< \delta$ mit M_δ, und betrachten auf M_δ zwei Polynome $f_k(z)$, $f_l(z)$, für die $p_k < p_l < 16 p_k$ gilt. Für $k > k_0(\delta)$ und ein $z \in M_\delta$ sind dann | >

$$|f_k(z)| > \sqrt{m_k}, \qquad |f_l(z)| > \sqrt{m_l} \text{ gleichzeitig unmöglich.}$$

Sonst wäre nämlich nach oben notwendig

$$\left|\varphi - \frac{a\cdot 2\pi}{p_k}\right| \leqq \frac{c}{p_k\sqrt{m_k}}\,, \quad \left|\varphi - \frac{b\cdot 2\pi}{p_l}\right| \leqq \frac{c}{p_l\sqrt{m_l}}; \tag{4}$$

für gewisse ganze Zahlen a und b. Dabei kommen für a und b ganzzahlige Vielfache von p_k bzw. p_l nicht in Frage, sobald $c/p_k\sqrt{m_k} < \delta$ ist, also für $k > k_0(\delta)$. Also würde (4) gelten für gewisse ganze Zahlen a, b, die nicht Vielfache von p_k, p_l sind. Dann wäre aber

$$\frac{2\pi}{p_k p_l} \leqq \left|\frac{2\pi(a p_l - b p_k)}{p_k p_l}\right| = \left|\frac{a\cdot 2\pi}{p_k} - \frac{b\cdot 2\pi}{p_l}\right| \leqq \frac{c}{p_k\sqrt{m_k}} + \frac{c}{p_l\sqrt{m_l}};$$

die linke Ungleichung gilt, weil $a p_l - b p_k \neq 0$ ist (sonst wäre ja z. B. p_k Teiler von a). Also würde gelten

$$\frac{2\pi}{16 p_k^2} \leqq \frac{2c}{p_k\sqrt{m_k}}\,, \tag{5}$$

eine Ungleichung, die durch hinreichend schnelles Wachstum von $\{m_k\}$ zerstört werden kann.

Die Folge $\{m_k\}$ sei jetzt so bestimmt, daß (3) gilt und ferner

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m_k}}{k(m_k+1)} = C < \infty\,, \tag{6}$$

daß hingegen (5) falsch ist für alle $k = 1, 2, \ldots$. Für ein $z \in M_\delta$ läßt sich dann $f(z)$ wie folgt zerlegen

$$f(z) = f^{(1)}(z) + f^{(2)}(z),$$

wobei $f^{(1)}(z)$ die Terme $f_k(z)$ enthalten soll, für die $|f_k(z)| \leqq \sqrt{m_k}$ ist, während $f^{(2)}(z)$ alle anderen Terme enthält. (Die Zerlegung von $f(z)$ hängt also von z ab.) Dann ist

$$|f^{(1)}(z)| \leqq \sum \frac{\sqrt{m_k}}{k(m_k+1)} \leqq C$$

(die Summe ist über gewisse k zu erstrecken), und weiter wegen $|f_k(z)| \leqq m_k + 1$ $(|z| \leqq 1)$

$$|f^{(2)}(z)| \leqq \sum \frac{1}{k},$$

wobei diese Summe über gewisse Werte k_i von k zu erstrecken ist, für die jedenfalls gilt

$$p_{k_{i+1}} > 8 p_{k_i} \qquad (i > i_0(\delta)). \tag{7}$$

Wendet man hier den Primzahlsatz an

$$\frac{x}{2\log x} < \pi(x) < \frac{2x}{\log x},$$

so ergibt sich $\pi(8x) > \frac{3}{2}\pi(x)$ von einer Stelle an, also folgt aus (7)

$$k_{i+1} > \frac{3}{2} k_i \qquad (i > i_1(\delta)),$$

und daher ist $|f^{(2)}(z)| \leqq K(\delta)$ für alle $z \in M_\delta$. Das bedeutet, daß jeder Punkt $z = e^{i\varphi}$ mit $|\varphi| > \delta$ regulärer Endpunkt von (2) ist.

Literatur

[1] Gaier, D. und W. Meyer-König: Singuläre Radien bei Potenzreihen. Jahresbericht d. DMV 59, 36—48 (1956).

(Eingegangen: 14. 2. 1957)