Konstruktion von nichtperiodischen Minimalbasen mit der Dichte $\frac{1}{2}$ für die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

Von *P. Erdös*, z. Z. in Mainz, und *E. Härtter* in Mainz

In einer früheren Arbeit zeigte der zweitgenannte Verfasser [1], daß es genau zwei periodische Minimalbasen zweiter Ordnung mit der Dichte $\frac{1}{2}$ für die Menge $\mathfrak{Z}$ der nichtnegativen ganzen Zahlen gibt [1]). Die Frage, ob nichtperiodische Minimalbasen mit dieser Eigenschaft existieren, blieb dabei offen; diese Frage soll nun im positiven Sinn beantwortet werden.

Wir konstruieren eine Minimalbasis $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung für $\mathfrak{Z}$ wie folgt: Die Menge

$$\mathfrak{B}_1 = \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 13, 14, \ldots, 50, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 97\} =$$
$$= \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, \ldots, b_{44}, b_{45}, b_{46}, b_{47}, b_{48}, b_{49}, b_{50}, b_{51}\}$$

($b_\alpha < b_\beta$ für $\alpha < \beta$) ist — wie man sich leicht überlegt — Abschnittsbasis zweiter Ordnung für 101. Dabei werden die Elemente $b_2 = 2$ und $b_3 = 3$ zur Darstellung von 5, das Element $b_4 = 6$ zur Darstellung von 12, das Element $b_5 = 7$ zur Darstellung von 101 und das Element $b_6 = 8$ zur Darstellung von 11 benötigt, denn man hat die eindeutigen Darstellungen $5 = 2 + 3$, $12 = 6 + 6$, $101 = 7 + 94$ und $11 = 3 + 8$.

Nun setzen wir

$$\mathfrak{A}_2 = \{102, \ldots, 500, 988\} \cup \mathfrak{B}_1',$$

wobei

$$\mathfrak{B}_1' = \{1001 - x \mid x \in \overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{Z} - \mathfrak{B}_1;\, x \leqq 101\}$$
$$= \{900, 901, 902, 903, 906, 908, 913, 914, 915, \ldots, 950, 989, 990, 991, 992, 996, 997\}$$

ist. $\mathfrak{A}_2$ enthält $400 + 50 = 450$ Elemente, so daß wir

$$\mathfrak{A}_2 = \{b_{52}, b_{53}, \ldots, b_{501}\} \qquad (b_\alpha < b_\beta \text{ für } \alpha < \beta)$$

setzen können und $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{B}_1$ insgesamt 501 positive Elemente enthält. Ferner ist $\mathfrak{B}_2$ Abschnittsbasis zweiter Ordnung für 1001, und 1001 hat die eindeutige Darstellung $1001 = 13 + 988$, d. h. $b_7 = 13$ wird zur Darstellung von 1001 benötigt.

Sei nun, in dieser Weise fortfahrend, für $n \geqq 3$ die Menge

$$\mathfrak{A}_{n-1} = \{b_{5 \cdot 10^{n-2}+2}, \ldots, b_{5 \cdot 10^{n-1}+1}\} \quad (b_\alpha < b_\beta \text{ für } \alpha < \beta)$$

[1]) Wegen der auftretenden Bezeichnungen siehe [1] und *Stöhr* [2].

schon konstruiert, so daß also $\mathfrak{B}_{n-1} = \mathfrak{A}_{n-1} \cup \mathfrak{B}_{n-2}$ insgesamt $5 \cdot 10^{n-1} + 1$ positive Elemente enthält, $\mathfrak{B}_{n-1}$ Abschnittsbasis zweiter Ordnung für $10^n + 1$ ist und $10^n + 1$ eine eindeutige Darstellung mit b_{n+4} besitzt, d. h. b_{n+4} zur Darstellung von $10^n + 1$ benötigt wird.

Dann setzen wir

$$\mathfrak{A}_n = \{10^n + 2, \ldots, 5 \cdot 10^n, 10^{n+1} + 1 - b_{n+5}\} \cup \mathfrak{B}'_{n-1}$$

mit

$$\mathfrak{B}'_{n-1} = \{10^{n+1} + 1 - x \mid x \in \overline{\mathfrak{B}}_{n-1} = \mathfrak{Z} - \mathfrak{B}_{n-1}; x \leqq 10^n + 1\}.$$

$\mathfrak{A}_n$ hat $[5 \cdot 10^n - (10^n + 1) + 1] + [10^n + 1 - (5 \cdot 10^{n-1} + 1)] = 4 \cdot 10^n + 5 \cdot 10^{n-1}$ Elemente, so daß wir

$$\mathfrak{A}_n = \{b_{5 \cdot 10^{n-1}+2}, b_{5 \cdot 10^{n-1}+3}, \ldots, b_{5 \cdot 10^n+1}\} \, (b_\alpha < b_\beta \text{ für } \alpha < \beta)$$

schreiben können und $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{B}_{n-1}$ insgesamt $5 \cdot 10^n + 1$ positive Elemente enthält.

Ferner ist $\mathfrak{B}_n$ — wie man sich leicht überlegt — Abschnittsbasis zweiter Ordnung für $10^{n+1} + 1$, und $10^{n+1} + 1$ hat die eindeutige Darstellung

$$10^{n+1} + 1 = b_{n+5} + (10^{n+1} + 1 - b_{n+5}),$$

d. h. b_{n+5} wird zur Darstellung von $10^{n+1} + 1$ benötigt.

Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ ist dann offenbar Minimalbasis zweiter Ordnung für die Menge $\mathfrak{Z}$ aller nichtnegativen ganzen Zahlen und nicht periodisch. Um nun zu zeigen, daß die so konstruierte Menge $\mathfrak{B}$ die (Schnirelmannsche) Dichte $\frac{1}{2}$ hat, beachten wir zunächst, daß die Anzahlfunktion $B_1(x) \geqq \frac{x}{2}$ ist für $x \leqq 101$ und aufgrund der Konstruktion für die Anzahlfunktion der Komplementärmenge

$$\overline{B}_1(101) - \overline{B}_1(101 - x - 1) = \begin{cases} B_1(x) + 1 & \text{für } 0 \leqq x < b_5 \\ B_1(x) & \text{für } b_5 \leqq x \leqq 101 \end{cases}$$

gilt[2]). Also wird

$$B'_1(900 + x) = \overline{B}_1(101) - \overline{B}_1(101 - x - 1) = \begin{cases} B_1(x) + 1 \geqq \frac{x}{2} + 1 \\ B_1(x) \geqq \frac{x}{2} \end{cases}$$

und, indem man $900 + x = y$ setzt,

$$B'_1(y) \geqq \begin{cases} \frac{1}{2}(y - 900) + 1 & \text{für } 900 \leqq y < 900 + b_5 \\ \frac{1}{2}(y - 900) & \text{für } 900 + b_5 \leqq y \leqq 1001. \end{cases}$$

Für die Anzahlfunktion der Menge $\mathfrak{B}_2$ haben wir aufgrund der Konstruktion $B_2(x) \geqq \frac{x}{2}$ für $x \leqq 900$ und

$$B_2(x) \geqq \begin{cases} 450 + B'_1(x) \geqq 450 + \frac{1}{2}(x - 900) + 1 \geqq \frac{x}{2} & \text{für } 900 \leqq x < 900 + b_5 \\ 450 + B'_1(x) \geqq 450 + \frac{1}{2}(x - 900) \geqq \frac{x}{2} & \text{für } 900 + b_5 \leqq x \leqq 1001; \end{cases}$$

[2]) Unter der Anzahlfunktion $A(x)$ der Menge $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{Z}$ verstehen wir $A(x) = \sum_{\substack{0 < a \leqq x \\ a \in \mathfrak{A}}} 1$, wobei leere Summen gleich 0 gesetzt werden.

ferner ist

$$\overline{B}_2(1001) - \overline{B}_2(1001 - x - 1) = \begin{cases} B_2(x) + 1 & \text{für } \; 0 \leqq x < b_7 \\ B_2(x) & \text{für } \; b_7 \leqq x \leqq 1001 \end{cases}$$

und somit

$$B_2'(9000 + x) = \overline{B}_2(1001) - \overline{B}_2(1001 - x - 1) = \begin{cases} B_2(x) + 1 \geqq \dfrac{x}{2} + 1 \\ \qquad B_2(x) \geqq \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

und, indem man $9000 + x = y$ setzt

$$B_2'(y) \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y - 900) + 1 & \text{für } \; 9000 \leqq y < 9000 + b_7 \\ \dfrac{1}{2}(y - 9000) & \text{für } \; 9000 + b_7 \leqq y \leqq 10001\,. \end{cases}$$

Nun schließen wir induktiv: Sei schon gezeigt (für $n \geqq 3$)

$$B_{n-1}(x) \geqq \frac{x}{2} \;\; \text{für } \; x \leqq 10^n + 1$$

und

$$\overline{B}_{n-1}(10^n + 1) - \overline{B}_{n-1}(10^n - x) = \begin{cases} B_{n-1}(x) + 1 & \text{für } \; 0 \leqq x < b_{n+4} \\ B_{n-1}(x) & \text{für } \; b_{n+4} \leqq x \leqq 10^n + 1\,, \end{cases}$$

d. h.

$$B_{n-1}'(9 \cdot 10^n + x) = \overline{B}_{n-1}(10^n + 1) - \overline{B}_{n-1}(10^n - x) \geqq \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 \\ \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

oder mit $9 \cdot 10^n + x = y$

$$B_{n-1}'(y) \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y - 9 \cdot 10^n) + 1 & \text{für } \; 9 \cdot 10^n \leqq y < 9 \cdot 10^n + b_{n+4} \\ \dfrac{1}{2}(y - 9 \cdot 10^n) & \text{für } \; 9 \cdot 10^n + b_{n+4} \leqq y \leqq 10^{n+1} + 1\,. \end{cases}$$

Dann folgt für die Anzahlfunktion der Menge $\mathfrak{B}_n$ aufgrund der Konstruktion

$$B_n(x) \geqq \begin{cases} B_{n-1}(x) \geqq \dfrac{x}{2} \;\; \text{für } \; x \leqq 10^n + 1, \\ B_{n-1}(10^n + 1) + [5 \cdot 10^n - (10^n + 1)] = 5 \cdot 10^{n-1} + 1 + 4 \cdot 10^n - 1 = 9 \cdot 5 \cdot 10^{n-1} \geqq \dfrac{x}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \; x \leqq 9 \cdot 10^n, \\ 4 \cdot 10^n + 5 \cdot 10^{n-1} + B_{n-1}'(x) \geqq 4 \cdot 10^n + 5 \cdot 10^{n-1} + \dfrac{1}{2}(x - 9 \cdot 10^n) + 1 \geqq \dfrac{x}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \; 9 \cdot 10^n \leqq x < 9 \cdot 10^n + b_{n+4}, \\ 4 \cdot 10^n + 5 \cdot 10^{n-1} + B_{n-1}'(x) \geqq 4 \cdot 10^n + 5 \cdot 10^{n-1} + \dfrac{1}{2}(x - 9 \cdot 10^n) \geqq \dfrac{x}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \; 9 \cdot 10^n + b_{n+4} \leqq x \leqq 10^{n+1} + 1 \end{cases}$$

und außerdem

$$\bar{B}_n(10^{n+1}+1)-\bar{B}_n(10^{n+1}-x)=\begin{cases} B_n(x)+1 & \text{für } 0 \leqq x < b_{n+5} \\ B_n(x) & \text{für } b_{n+5} \leqq x \leqq 10^{n+1}+1, \end{cases}$$

also

$$B_n'(9\cdot 10^{n+1}+x)=\bar{B}_n(10^{n+1}+1)-\bar{B}_n(10^{n+1}-x)\geqq\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 \\ \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

oder mit $9\cdot 10^{n+1}+x=y$

$$B_n'(y)\geqq\begin{cases} \dfrac{1}{2}(y-9\cdot 10^{n+1})+1 & \text{für } 9\cdot 10^{n+1}\leqq y < 9\cdot 10^{n+1}+b_{n+5} \\ \dfrac{1}{2}(y-9\cdot 10^{n+1}) & \text{für } 9\cdot 10^{n+1}+b_{n+5}\leqq y \leqq 10^{n+1}+1. \end{cases}$$

Daraus geht hervor, daß die Menge $\mathfrak{B}$ die Dichte $\frac{1}{2}$ hat.

Man erkennt leicht, daß sich auf diese Art kontinuierlich viele nichtperiodische Minimalbasen mit der Dichte $\frac{1}{2}$ konstruieren lassen.

Literatur

[1] *E. Härtter*, Eine Bemerkung über periodische Minimalbasen für die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Journal f. d. reine u. angew. Math. **214/215** (1964), 395—398.

[2] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. Journal f. d. reine u. angew. Math. **194** (1955), 40—65.

Eingegangen 29. September 1964