Über die Anzahl der Primfaktoren von $\binom{n}{k}$

Von

P. Erdös

$V(m)$ sei die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von m. Scheid [6] (siehe auch [5] und [8]) zeigte, daß für $2 < 2k \leqq n$

$$V\left(\binom{n}{k}\right) > \frac{k \log 2}{\log 2k}$$

ist. Zunächst beweisen wir folgenden

Satz. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $k > k_0(\varepsilon)$ *ist für* $n \geqq 2k$

$$V\left(\binom{n}{k}\right) > (1-\varepsilon)\frac{k \log 4}{\log k}. \tag{1}$$

(1) *ist in einem gewissen Sinne scharf. Es gilt nämlich für* $k > k_0(\varepsilon)$

$$V\left(\binom{2k}{k}\right) < (1+\varepsilon)\frac{k \log 4}{\log k}. \tag{2}$$

Bekanntlich gilt für jedes $p^\alpha \,\|\, \binom{n}{k}$, $p^\alpha \leqq n$ ([1]; siehe auch [2], [3], [5], [6], [8]). Daher ist offenbar

$$V\left(\binom{n}{k}\right) \geqq \log\left(\binom{n}{k}\right) / \log n. \tag{3}$$

Nun sei zunächst $n < k^{1+\eta}$, $\eta = \eta(\varepsilon)$. Aus (3) folgt dann wegen

$$\binom{2k}{k} > 4^k/2k, \quad \binom{n}{k} \geqq \binom{2k}{k}$$

$$V\left(\binom{n}{k}\right) \geqq \log\left(\binom{2k}{k}\right) / (1+\eta)\log k > \frac{k\log 4 - \log 2k}{(1+\eta)\log k} > (1-\varepsilon)\frac{k \log 4}{\log k}. \tag{4}$$

Für $n \geqq k^{1+\varepsilon}$ gilt offenbar wegen $\binom{n}{k} > n^k/k^k$ und (3)

$$V\left(\binom{n}{k}\right) > k\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) \geqq k\left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right) > \frac{k \log 4}{\log k} \tag{5}$$

für $k > k_0(\varepsilon)$. Damit ist (1) bewiesen.

Nun wollen wir (2) beweisen. Es sei $t(k, \eta)$ die Anzahl der Primfaktoren $p > k^{1-\eta}$ von $\binom{2k}{k}$. Offenbar gilt

$$k^{(1-\eta)\, t(k,\eta)} < \binom{2k}{k} < 4^k,$$

also

$$t(k, \eta) < \frac{k \log 4}{(1-\eta) \log k}$$

und endlich für $k > k_0(\varepsilon)$

$$V\left(\binom{2k}{k}\right) < t(k, \eta) + k^{1-\eta} < (1+\varepsilon) \frac{k \log 4}{\log k},$$

womit auch (2) bewiesen ist. Eine ähnliche Schlußweise gibt offenbar

$$V\left(\binom{n}{k}\right) < (1+\varepsilon) \frac{n \log 2}{\log n}. \tag{6}$$

Die hier angewandte Methode zeigt leicht, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon)$ existiert, so daß für jedes $k > k_0(\varepsilon)$ und $n > (2+\varepsilon) k$

$$V\left(\binom{n}{k}\right) > V\left(\binom{2k}{k}\right) \tag{7}$$

gilt. Wir überlassen den Beweis von (7) dem Leser.

Selfridge zeigte durch leichtes Rechnen, daß für jedes $k < 21$

$$\min_{n \geqq 2k} V\left(\binom{n}{k}\right) = V\left(\binom{2k}{k}\right), \tag{8}$$

aber für $k = 21$ ist

$$V\left(\binom{42}{21}\right) = 10 \quad \text{und} \quad V\left(\binom{48}{21}\right) = 9.$$

Wahrscheinlich gibt es Werte von k mit

$$V\left(\binom{2k+1}{k}\right) < V\left(\binom{2k}{k}\right). \tag{9}$$

Es gilt wohl

$$\liminf_{k \to \infty} \left(V\left(\binom{2k+1}{k}\right) - V\left(\binom{2k}{k}\right)\right) = -\infty.$$

Es ist möglich, daß (8) nur für endlich viele Werte von k gilt, aber dies wird sicher schwer sein.

Die Folge $V\left(\binom{n}{k}\right)$, $1 \leqq k \leqq \frac{n}{2}$ ist sicher nicht monoton für alle n, da $V\left(\binom{78}{6}\right) < V\left(\binom{78}{5}\right)$. Wahrscheinlich gibt es für alle $n > n_0$ ein k mit $V\left(\binom{n}{k+1}\right) < V\left(\binom{n}{k}\right)$.

Scheid hält es für wahrscheinlich, daß $V\left(\binom{n}{k}\right)$ für fixes k nicht gegen Unendlich strebt. Dies ist in der Tat richtig:

$$V\left(\binom{n}{k}\right) < c_k k \tag{10}$$

gilt für unendlich viele n. (10) folgt unschwer aus der Brunschen Methode. Bekanntlich gibt es unendlich viele Werte von n, so daß für alle $0 \leqq i \leqq k-1$, $V(n-i) < c_k'$ ist und daraus folgt (10) sofort mit $c_k < k c_k'$ ((10) bleibt sogar richtig ,wenn man die Primfaktoren mit Multiplizität zählt).

Es ist leicht einzusehen, daß für $n > 2 \cdot k!$

$$V\left(\binom{n}{k}\right) \geqq k \tag{11}$$

gilt. Für $n > 2 \cdot k!$ gilt offenbar

$$\binom{n}{k} > n^{k-1}$$

und daher folgt (11) aus $p^\alpha \,\|\, \left(\binom{n}{k}\right)$, $p^\alpha \leqq n$, unmittelbar. ($n > 2 \cdot k!$ läßt sich weitgehend verschärfen, sicherlich bis $n > c^k$). Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß für jedes k und unendlich viele n

$$V\left(\binom{n}{k}\right) = k \tag{12}$$

gilt. Dies würde aus der Hypothese H von Schinzel [7] folgen, ist aber beim heutigen Stand der Wissenschaft wohl unerreichbar.

Man kann die folgenden zwei Funktionen von k betrachten: $f_1(k)$ sei die kleinste Zahl für welche

$$V\left(\binom{f_1(k)}{k}\right) \geqq k$$

und $f_2(k)$ sei die kleinste Zahl für welche für alle $l \geqq f_2(k)$

$$V\left(\binom{l}{k}\right) \geqq k$$

ist. Wahrscheinlich ist für genügend großes k, $f_2(k) > f_1(k)$.

Wie schon erwähnt, ist $f_2(k) < 2k!$ trivial. Ich kann mit etwas mehr Mühe $f_2(k) < c^k$ zeigen. Ich unterdrücke aber den Beweis, da wahrscheinlich viel mehr wahr ist. Ich vermute $f_2(k) < k^c$ für eine genügend große absolute Konstante c. Es gilt

$$f_2(k) > c_1 k^e, \tag{13}$$

$$c_2 k^2 \log k < f_1(k) < c_3 k^e. \tag{14}$$

Der Beweis von (13) und (14) ist in etwas anderer Form in meiner kürzlich erschienenen Arbeit mit Selfridge enthalten [4]. Abschließend möchte ich noch eine Vermutung angeben: Für fast alle $n < k^{1+\alpha}$ gilt

$$V\left(\binom{n}{k}\right) = (1 + o(1))\, k \log(1 + \alpha). \tag{15}$$

$$\sum_{n=2k}^{k^{1+\alpha}} V\left(\binom{n}{k}\right) = (1 + o(1))\, k^{2+\alpha} \log(1 + \alpha)$$

ist sehr leicht zu zeigen. (15) würde sofort mit der Turánschen Methode [9] aus

$$\sum_{n=2k}^{k^{1+\alpha}} V\left(\binom{n}{k}\right)^2 = (1 + o(1))\, k^{3+\alpha} (\log(1 + \alpha))^2 \tag{16}$$

folgen, (16) konnte ich aber bis jetzt nicht beweisen.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös, Beweis eines Satzes von Tchebischeff. Acta Sci. Math. (Szeged) **5**, 194–198 (1932).

[2] P. Erdös, A theorem of Sylvester and Schur. J. London Math. Soc. **9**, 282–288 (1934).

[3] P. Erdös, On consecutive integers. Nieuw Arch. Wisk. **3**, 124–128 (1955).

[4] P. Erdös and J. Selfridge, Some problems on the prime factors of consecutive integers, II. Pullman conference on number theory 1971.

[5] F. Hering, Eine Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten und Primzahlpotenzen. Arch. Math. **19**, 411–412 (1968).

[6] H. Scheid, Die Anzahl der Primfaktoren in $\binom{n}{k}$. Arch. Math. **20**, 581–582 (1969).

[7] A. Schinzel et W. Sierpinski, Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Acta Arith. **4**, 185–208 (1958).

[8] W. Stahl, Bemerkung zu einer Arbeit von Hering. Arch. Math. **20**, 580 (1969).

[9] P. Turán, On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math. Soc. **9**, 274–276 (1934).

Eingegangen am 8. 3. 1972

Anschrift des Autors:

P. Erdös
Mathematisches Institut
Ungarische Akademie der Wissenschaften
Budapest, Ungarn
und Technion Math. Dept.
Haifa, Israel