О множествах согласованных дуг в турнире[1])

П. Эрдёш, Дж. В. Мун

1. Введение. *Турнир* (круговой) T_n состоит из n узлов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и каждая пара различных узлов соединена одной из (ориентированных) дуг $\overrightarrow{u_i u_j}$ или $\overrightarrow{u_j u_i}$. Говорят, что дуги некоторого множества S *согласованы*, если можно так пронумеровать узлы турнира, что если в S имеется дуга $\overrightarrow{u_i u_j}$, то $i > j$. (Легко видеть, что требование согласованности эквивалентно требованию отсутствия ориентированных циклов, полностью состоящих из дуг множества S.) Множества согласованных дуг интересны, например, в тех случаях, когда турнир представляет собой результат эксперимента, проводимого методом попарных сравнений [1]. Цель этой заметки — получить оценки для числа $f(n)$, наибольшего из таких целых чисел k, что каждый турнир T_n содержит множество из k согласованных дуг.

2. Нижняя оценка для $f(n)$. Покажем, что для всех положительных целых n

$$f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right], \tag{1}$$

где, как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое, не большее x.

Для $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что оно верно для всех таких n, что $1 \leqslant n \leqslant m-1$, и рассмотрим произвольный турнир T_m. Так как в каждом турнире $m(m-1)/2$ дуг, то найдется узел, скажем u_m, из которого исходит по меньшей мере $[m/2]$ дуг. По определению турнир, порожденный остальными $m-1$ узлами, содержит множество S, состоящее по меньшей мере из $f(m-1)$ согласованных дуг. Ясно, что дуги, исходящие из u_m, и дуги, принадлежащие множеству S, согласованы; поэтому в силу предположения индукции турнир T_m содержит множество, состоящее

---

[1]) Erdős P., Moon J. W., On sets of consistent arcs in a tournament, *Canad. Math. Bull.*, 8, 3 (1965), 269–271.

по меньшей мере из

$$\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{m}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{m+1}{2}\right]$$

согласованных дуг. Неравенство (1) доказано [1]).

3. Верхняя оценка для $f(n)$. Покажем, что для любого фиксированного положительного числа ε и всех достаточно больших n

$$f(n)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{2}\binom{n}{2}. \tag{2}$$

Пусть выбрано $\varepsilon>0$. В турнире T_n можно $n!$ способами перенумеровать узлы, а число пар различных узлов равно $N=\binom{n}{2}$. Следовательно, существует не более $n!\binom{N}{k}$ таких турниров, у которых наибольшее множество согласованных дуг состоит из k дуг. Таким образом, число турниров T_n, содержащих множество с более чем $(1+\varepsilon)N/2$ согласованными дугами, не превосходит

$$\begin{aligned}
n!\sum_{k>(1+\varepsilon)N/2}\binom{N}{k}&\leqslant n!\,N\binom{N}{[(1+\varepsilon)N/2]}\binom{N}{[N/2]}\binom{N}{[N/2]}^{-1}<\\
&<n!\,N2^N\binom{N}{[(1+\varepsilon)N/2]}\binom{N}{[N/2]}^{-1}=\\
&=n!\,N2^N\frac{(N-[N/2])(N-[N/2]-1)\dots(N-[(1+\varepsilon)N/2]+1)}{([N/2]+1)([N/2]+2)\dots[(1+\varepsilon)N/2]}<\\
&<n!\,N2^Ne^{-\varepsilon^2N/4}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Последнее из неравенств (3) получается с помощью простого подсчета с использованием неравенства $1-x<e^{-x}$ для $0<x<1$. Но для всех достаточно больших n правая часть в (3), как легко видеть, меньше общего числа 2^N турниров с n (нумерованными) узлами. Следовательно, должен существовать турнир T_n, не содержащий множества с более чем $(1+\varepsilon)N/2$ согласованными дугами. Это доказывает (2). При более точном анализе неравенств (3) те же соображения приводят к оценке

$$f(n)<\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)(n^3\log n)^{1/2}. \tag{4}$$

Было бы хорошо получить для $f(n)$ еще лучшую оценку.

---

[1]) Недавно Рейд [2] несколько улучшил эту оценку, доказав, что $f(n)\geqslant[n/2]\cdot[(n+3)/2]-1$ для $n\geqslant2$ и $f(n)\geqslant[n/2]\cdot[(n+3)/2]$ для $n\geqslant8$. — *Прим. перев.*

Рассуждения предыдущего абзаца показывают бесполезность вероятностных методов в экстремальных задачах теории графов: мы можем легко убедиться в существовании турнира с нужным нам свойством, но в общем случае не в состоянии дать явную конструкцию такого турнира.

4. Более общая задача. Пусть $G(n, m)$ — неполный турнир (или ориентированный граф) с n узлами и m дугами, а $f(n, m)$ — наибольшее из таких целых чисел k, что каждый неполный турнир $G(n, m)$ содержит множество с не менее чем k согласованными дугами. Если предполагается, что $(n \log n)/m \to 0$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, то с помощью соображений, использованных выше, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n, m)}{m} = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kendall M. G., Smith B. B., On the method of paired comparisons, *Biometrica*, 31 (1939), 324—345.
2*. Reid K. B., On sets of arcs containing no cycles in a tournament, *Canad. Math. Bull.*, 12, 3 (1969).

* Добавлено при переводе. — *Прим. перев.*