Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 32, 19 p.

11 juin 1979

SUR LA FONCTION "NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE n"

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS (*)
[Budapest et Limoges]

Résumé. - Soit $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n. On dit que n est ω-largement composé si $m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$. La quantité $Q_\ell(X)$ de tels nombres $\leqslant X$ vérifie $\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leqslant Q_\ell(X) \leqslant \exp(c_2 \sqrt{\log X})$. On démontre aussi

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x \ ; \quad \omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x}\} = x^{1-c+o(1)}$$

et, si $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leur multiplicité

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)) .$$

On étudie les nombres n ω-intéressants, définis par

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} ,$$

et on démontre qu'il existe une infinité de points d'étranglement n_k pour la fonction $n - \omega(n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k) ,$$

et

$$m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k) .$$

Introduction. - Soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives : Une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraîne

$$f(mn) = f(m) + f(n) .$$

HARDY et RAMANUJAN (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log\log n$. En 1934, P. TURAN donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant (cf. [Tur]) :

$$\sum_{n=1}^{x} (\omega(n) - \log\log x)^2 = O(x \log\log x) .$$

En 1939, M. KAC et P. ERDÖS démontraient (cf. [Kac]) :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{card}\{n \leqslant x \ ; \quad \omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-\frac{u^2}{2})\, du .$$

Ensuite, P. ERDÖS ([Erd 1]) et L. G. SATHE ([Sat]) s'intéressaient aux entiers

---

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.

Paul ERDÖS, Akademia Matematikai Intezete, 13-15 Realtanoda u., H.1053 BUDAPEST (Hongrie), et Jean-Louis NICOLAS, Département de Mathématiques, UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

$\leq x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log\log x$. A. SELBERG ([Sel]) donnait la "formule de Selberg" :

$$(1) \qquad \sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = zF(z)\, x(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\mathrm{Re}\, z-2})$$

où $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^z .$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de SATHE et d'évaluer avec précision la quantité

$$\mathrm{card}\{n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log\log x\}\ , \quad \alpha > 1$$

(cf. proposition 3, [Del 1], et [Del 2]).

Soit p_k le k-ième nombre premier, et posons $A_k = 2.3. \ldots .p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω-hautement composé si $m < n \Longrightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω-hautement composés est la suite A_k.

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que, lorsque $n \to \infty$, (cf. [Wri], ch. XVIII) :

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log\log n}(1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω-hautement composés au plus égaux à X vérifie

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log\log X} .$$

On dit maintenant que n est ω-largement composé, si $m \leq n \Longrightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. Si $A_k \leq n < A_{k+1}$, n est ω-largement composé si, et seulement si, $\omega(n) = k$. Soit $Q_\ell(X)$ le nombre de nombres ω-largement composés $\leq X$. Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Il existe deux constantes</u> $0 < c_1 < c_2$ <u>telles que</u>

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_\ell(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}) .$$

Nous démontrerons ensuite le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> c, $0 < c < 1$. <u>On a</u>

$$f_c(x) = \mathrm{card}\{n \leq x\ ;\ \omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x}\} = x^{1-c+o(1)} .$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple $\mathrm{card}\{n \leq x\ ;\ \omega(n) > (\log x)^\alpha\}$, $0<\alpha<1$. KOLESNIK et STRAUSS (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extremes de $f(n) + f(n+1)$, pour quelques fonctions arithmétiques f . Nous démontrerons en particulier le résultat suivant.

THÉORÈME 3. - On a, pour $n \to +\infty$,

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)) .$$

Au paragraphe 4, nous disons qu'un nombre n est ω-intéressant si

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} .$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n , si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n) .$$

Interprétation géométrique : Le graphe de f , contenu dans l'angle droit de sommet $(n , f(n))$ et de côtés parallèles aux axes, s'étrangle en n . Nous démontrerons enfin le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - La fonction $n \longmapsto n - \omega(n)$ a une infinité de points d'étranglement.

Pour un tel point n , il existe juste avant n , une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers, et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

1. Démonstration du théorème 1.

Minoration. - D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $f(x)/x$ décroisse et tende vers 0 , il existe, entre $(1 - 2\varepsilon)\log X$ et $(1 - \varepsilon)\log X$ un nombre x tel que

$$\pi(x + f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \pi(x) - \pi(x - f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x} .$$

On choisit $f(x) = c\sqrt{x}\log x$. Soit k tel que $p_k < x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres :

$$n = A_{k-r}\, q_1 \ldots q_r , \quad 0 \leq r \leq s ,$$

où $q_1 , \ldots , q_r$ sont des nombres premiers choisis parmi $p_{k+1} , \ldots , p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$, et il y en a 2^s . De plus, ils vérifient

$$n \leq A_k[p_{k+s}/p_{k-s}]^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$. On a alors :

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x + f(x)}{x - f(x)} \lesssim 2c^2 \log x .$$

Si l'on choisit $c < 1/\sqrt{2}$, on aura donc $A_k \leqslant n < A_{k+1}$, et ces nombres n seront ω-largement composés et $\leqslant X$. On aura donc

$$Q_\ell(X) \geqslant 2^s \geqslant \exp((1 - \varepsilon) \frac{\log 2}{\sqrt{2}} \sqrt{\log X}) .$$

<u>Majoration</u>. – La majoration de $Q_\ell(X)$ est basée sur le lemme suivant.

LEMME 1. – <u>Soit</u> $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., p_k, <u>le</u> k-<u>ième nombre premier</u>, <u>et soit</u> $T(x)$ <u>le nombre de solutions de l'inéquation</u>

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leqslant x , \quad x_i \in \{0 , 1\} .$$

<u>Si</u> $C > \pi\sqrt{2/3}$, <u>on a pour</u> x <u>assez grand</u>,

$$\log T(x) \leqslant C \sqrt{\frac{x}{\log x}} .$$

<u>Démonstration</u>. – Le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots = n , \quad x_i \in \{0 , 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leqslant x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Ramanujan (cf. [Ram]), et ROTH et SZEKERES donnent la formule [Roth]

$$\log S(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{n}{\log n}} (1 + O(\frac{\log \log n}{\log n})) ,$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n. On a alors $T(x) \leqslant xS[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble

$$E_k = \{n | \omega(n) = k , n < A_{k+1}\} .$$

Soit $n \in E_k$, $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \dots q_k$ est sans facteur carré, et $n' \in E_k$. De plus $n/n' < p_{k+1}$. On a donc

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} \text{ card } E'_k ,$$

avec $E'_k = \{n ; n \text{ sans facteur carré, } \omega(n) = k , n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit

$$n = 2^{1-y_k} 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-y_1} p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1, et $\Sigma x_i = \Sigma y_i$. Il vient

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'iné–

quation, en x_i et y_i valant 0 ou 1 ,

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1} .$$

On en déduit card $E_k' \leq N_1 N_2$, avec N_i = nombre de solutions de l'inéquation (ξ_i) $(i = 1 , 2)$

$$(\xi_1) \qquad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leq \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \qquad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r}} + \dots \leq \log p_{k+1} .$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation (ξ_1) en deux

$$(\xi_1') \qquad \sum_{r=1}^{R} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1} ,$$

$$(\xi_1'') \qquad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1} .$$

Le nombre de variables de (ξ_1'') est en fait fini, et majoré par $p_k\, p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de (ξ_1'') est majoré par $\log p_{k+1}/\log 2$. Le nombre N_1'' de solutions de (ξ_1'') est majoré par

$$N_1'' \leq \sum_{j \leq \log p_{k+1}/\log 2} \binom{p_k\, p_{k+1}}{j} \leq \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} (p_k\, p_{k+1})^{\log p_{k+1}/\log 2}$$

ce qui assure

$$\log N_1'' = O((\log p_k)^2) .$$

Il résulte de l'inégalité de Brun–Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]),

$$\pi(x) - \pi(x - y) < 2y/\log y ,$$

valable pour $1 < y \leq x$, que

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log(p_{k+r} - p_k) \geq \frac{r}{2} \log 2r .$$

On en déduit que, pour $r \leq R$, on a

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geq \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geq \frac{r \log 2r}{4p_k} \geq c\, \frac{p_r}{p_k} .$$

Toute solution de (ξ_1') est donc solution de l'inéquation

$$x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \dots + x_r\, p_r + \dots \leq \frac{1}{c}\, p_k \log p_{k+1}$$

et, d'après le lemme précédent, on a

$$\log N_1' = O(\sqrt{p_k}) ,$$

et le nombre de solutions de (ξ_1) vérifie $\log N_1 = O(\sqrt{p_k})$.

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de (ξ_2) vérifie

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}) .$$

Ceci entraîne

$$\log(\text{card } E'_k) \leq \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1}(\text{card } E'_k) = \exp(O(\sqrt{p_k})) .$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω-largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_\ell(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie, en posant $A_{k_0} \leq X < A_{k_0+1}$, ce qui entraîne $\log X \sim p_{k_0}$

$$Q_\ell(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}) .$$

Remarque. – On peut conjecturer que $\log Q_\ell(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet, si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le "2" venant de la formule de Brun-Titschmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k, on peut assimiler $\log p_{k+r}/p_k$ à $r(\log p_{k+1}/p_k)$, et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i , \quad x_i , y_i \in \{0 , 1\} .$$

Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{2/3} \sqrt{p_k}$.

2. Démonstration du théorème 2.

Minoration. – Posons

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x}\right] + 1 \quad \text{et} \quad A_k = e^{\theta(p_k)} = 2.3. \ldots .p_k ,$$

où $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$ est la fonction de Čebyšev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > (c \log x)/(\log \log x)$. Il y en a $[x/A_k]$ qui sont inférieurs à x. On a (cf. [Land], § 57)

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)) .$$

Il vient, en posant $\ell = \log x$, $\ell_2 = \log \log x$,

$$k = \frac{c\ell}{\ell_2} + O(1)$$

$$\log A_k = c\ell + c(\log c - 1)(1 + o(1)) \ell/\ell_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left[\frac{x}{A_k}\right] \geq x^{1-c} \exp(c(1 - \log c)(1 + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x} .$$

Majoration. – En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38, ou [Hal 2], p. 147), on obtient

$$\left[\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\right]^k \geq k! \sum_{2\leq p_{i_1} <\ldots<p_{i_k} \leq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} .$$

On a donc, pour $k \in \underset{\sim}{\mathrm{N}}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leq x, n\in S, \omega(n)=k} 1 \leq \sum_{n\leq x, n\in S, \omega(n)=k} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!}(\sum_{p\leq x} \frac{1}{p})^k .$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leq x$ dont les facteurs premiers sont exactement p_{i_1} , p_{i_2} , ... , p_{i_k} . On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x \ ; \quad \alpha_j \geq 1 .$$

Ceci entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leq [\frac{\log x}{\log 2}] \ ; \quad \alpha_j \geq 1 .$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut

$$\binom{[\log x/\log 2]}{k} \leq \frac{1}{k!}(\frac{\log x}{\log 2})^k .$$

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leq x, \omega(n)=k} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} (\sum_{p\leq x} \frac{1}{p})^k (\frac{\log x}{\log 2})^k$$

et

$$\sum_{n\leq x, \omega(n)\geq k} 1 \leq x \sum_{j\geq k}((\sum_{p\leq x} 1/p)^j (\log x/\log 2)^j)/(j!)^2 .$$

On utilise la majoration $\sum_{j\geq k} a^j/(j!)^2 \leq a^k/(k!)^2 \, 1/(1 - a/(k + 1)^2)$, valable pour $a < (k + 1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land], § 28) qu'il existe B tel que $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B$, et on choisit

$$k = [\frac{c \log x}{\log \log x}] + 1 .$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq x \frac{(\ell_2 + B)^k (\ell/\log 2)^k}{(k!)^2}(1 + O(\frac{\ell_2^3}{\ell}))$$

et, en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp(3c(1 + o(1)) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x}) ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n + 1)$.

1° Fonction $\sigma(n)$ = somme des diviseurs de n . - On remarque d'abord que, lorsque $n \to + \infty$,

(2) $\sigma(n) = n \prod_{p^a\|n} (1 + \frac{1}{p} +\ldots+ \frac{1}{p^a}) = n(1 + o(1)) \prod_{p^a\|n, p\leq \log n} (1 + \frac{1}{p} +\ldots+\frac{1}{p^a})$;

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n/\log \log n$; et

$$\prod_{p^a \| n, p > \log n} (1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}) \leqslant \prod_{p^a \| n, p > \log n} \frac{1}{1 - 1/p}$$

$$\leqslant (1 - \frac{1}{\log n})^{-\log n / \log\log n} = 1 + \frac{O(1)}{\log\log n} ,$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n, $\sigma(n) \geqslant n$, et pour n pair, $\sigma(n) \geqslant \frac{3}{2} n$. On a donc, pour tout n, $\sigma(n) + \sigma(n + 1) \geqslant \frac{5}{2} n$. Inversement, pour k tendant vers ∞, le nombre $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$ est tel que n et $n + 1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1 - \varepsilon) \log n$, et donc vérifie

$$\sigma(n) + \sigma(n + 1) = \frac{5}{2} n(1 + o(1)) .$$

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n + 1)$ de la façon suivante : Il résulte de (2) que $\sigma(n) + \sigma(n + 1) \leqslant n(1 + o(1))(P_1 + P_2)$ avec

$$P_1 = \prod_{p | n, p \leqslant \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{p | n+1, p \leqslant \log n} \frac{1}{1 - 1/p} .$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs ou égaux à 1, $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$. Mais

$$P_1 P_2 \leqslant \prod_{p \leqslant \log n} \frac{1}{1 - 1/p} \sim e^\gamma \log\log n ,$$

où γ est la constante d'Euler, d'après la formule de MERTENS (cf. [Wril]). Cela donne, pour tout n,

$$\sigma(n) + \sigma(n + 1) \leqslant n(1 + o(1))\, e^\gamma \log\log n .$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque, pour une infinité de n, on a (cf. [Wril])

$$\sigma(n) \sim n\, e^\gamma \log\log n .$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut prendre P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leqslant x} \sigma(n)$ et de $\max_{n \leqslant x} (\sigma(n) + \sigma(n - 1))$ montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie

$$\max_{n \leqslant N+1} (\sigma(n) + \sigma(n - 1)) = \sigma(N) + \sigma(N - 1) \quad \text{ou} \quad \sigma(N + 1) + \sigma(N) .$$

2° <u>Indicateur d'Euler</u> φ. - On a une relation analogue à (2)

$$\varphi(n) = n \prod_{p | n} (1 - \frac{1}{p}) = n(1 + o(1)) \prod_{p | n, p \leqslant \log n} (1 - \frac{1}{p}) .$$

On démontre comme précédemment que, pour tout n, on a

$$\varphi(n) + \varphi(n + 1) \leqslant \frac{3}{2} n$$

et que, pour une infinité de n,

$$\varphi(n) + \varphi(n + 1) \sim \frac{3}{2} n .$$

Pour les petites valeurs de $\varphi(n) + \varphi(n + 1)$, on a

$$\varphi(n) + \varphi(n + 1) \geqslant n(1 + o(1))(P_1 + P_2) \geqslant 2n(1 + o(1)) \sqrt{P_1 P_2} ,$$

avec

$$P_1 = \prod_{p|n, p\leq \log n}(1 - \frac{1}{p}) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{p|n+1, p\leq \log n}(1 - \frac{1}{p}) ,$$

et, comme

$$P_1 P_2 \geq \prod_{p\leq \log n}(1 - 1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n} ,$$

on a

$$\varphi(n) + \varphi(n + 1) \geq \frac{2e^{-\gamma/2} n(1 + o(1))}{\sqrt{\log\log n}} .$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante : soit $k \geq 4$. On pose $P_k = \prod_{p\leq p_k}(1 - 1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel que $p_{k'} \geq \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a, lorsque $k \to +\infty$, $\frac{\varphi(R)}{R} = \frac{\varphi(S)}{S}(1 + o(1))$, et l'on prend pour n la plus petite solution des congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 \mod R \\ n + 1 \equiv 0 \mod S . \end{cases}$$

3° Fonction Ω. Démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 1. - *Soit $\varepsilon > 0$, et $k > 0$. On écrit $n(n + 1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leq k$. Alors il existe $n_0(k , \varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $U_k \leq n^{1+\varepsilon}$.*

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque

$$\begin{aligned} \Omega(n) + \Omega(n + 1) &= \Omega(n(n + 1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leq \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \frac{\log n}{\log 2} + \frac{\log n(n + 1)}{\log k} \quad \text{pour } n \geq n_0 . \end{aligned}$$

Etant donné η, il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir

$$\Omega(n) + \Omega(n + 1) < \frac{\log n}{\log 2}(1 + \eta) \quad \text{pour } n \geq n_0 .$$

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th. 4-F) comme nous l'a précisé M. LANGEVIN.

PROPOSITION 2 (RIDOUT). - *Soit θ un nombre algébrique $\neq 0$. Soit $P_1, P_2, \dots, P_s$, $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ des nombres premiers distincts, et $\delta > 0$. Il y a un nombre fini de nombres rationnels a/b de la forme :*

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_t^{\beta_t}$$

avec $\alpha_1 , \alpha_2 \dots \alpha_s$, $\beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_t \in \mathbb{N}$ et $a' , b' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|\theta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{|a' b'| \, |ab|^{\delta}} .$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que, pour une infinité de n, on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leqslant k$ en deux parties $P_1, P_2, \dots, P_s$ et $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leqslant k \text{ et } p|n \Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\}$$

$$p \leqslant k \text{ et } p|n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\} .$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \dots Q_t^{\beta_t}$, et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $(n+1)/n$, solution de :

$$\left|1 - \frac{n+1}{n}\right| < \frac{1}{|n' n''|(n(n+1))^{\delta}}$$

puisque $n' n'' = V_k \leqslant n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leqslant 300\,000$ vérifiant $m < n \Rightarrow \Omega(m(m+1)) < \Omega(n(n+1))$ sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega(n(n+1))$) : 2(2) ; 3(3) ; 7(4) ; 8(5) ; 15(6) ; 32(7) ; 63(9) ; 224(10) ; 255(11) ; 512(13) ; 3968(14) ; 4095(17) ; 14436(18) ; 32768(19) ; 65535(20) ; 180224(22) ; 262143(24) .

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4° Fonction ω. – Nous avons rappelé dans l'introduction que, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n}(1 + o(1)) .$$

Soit

$$\ell = \overline{\lim} \frac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n/\log\log n} .$$

On a $1 \leqslant \ell \leqslant 2$ de façon évidente. On a probablement $\ell = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega(m(m+1)) < \omega(n(n+1))$ est 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc. On a en particulier $714 = 2.3.7.17$ et $715 = 5.11.13$. L'équation

$$n(n+1) = 2.3.5. \dots .p_k$$

a-t-elle des solutions > 714 (cf. [Nel]) ?

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p, on a $\Omega(2p+1) \leqslant 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que, pour une infinité de n, on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leqslant \Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant 4 .$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen $(\Omega(2p+1)=1)$ permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω.

Si l'on a $\omega(n)+\omega(n+1)=2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne $(n=2^p-1$ avec p premier) ou si $n+1$ est un nombre premier de Fermat $(n+1=2^{2^k}+1)$. D'autre part, l'équation $2^n \pm 1 = p^a$ avec $a \geqslant 2$, qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n, tels que $\omega(n)+\omega(n+1)=2$, est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

4. Nombres ω-intéressants.

Définition. - On dit que n est ω-intéressant si l'on a

$$m > n \Longrightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} .$$

Interprétation géométrique : pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour $k \geqslant 1$, le nombre $A_k = 2.3.\ \ldots\ .p_k$ est ω-intéressant.

En effet, si $\omega(m) \leqslant k$, on a bien $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geqslant A_k\, 3^\Delta$ et

$$\frac{\omega(m)}{m} \leqslant \frac{k+\Delta}{A_k\, 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k}\, \frac{(1+\Delta/k)}{3^\Delta} \leqslant \frac{\omega(A_k)}{A_k}\, \frac{1+\Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k} .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Soit n vérifiant

$$A_k < n < A_{k+1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k ,$$

alors n est ω-intéressant.

Démonstration. - Soit $m > n$. Ou bien on a $m \geqslant A_{k+1}$ et, d'après la propriété 1,

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leqslant \frac{(k+1)(1-1/k)}{n} < \frac{\omega(n)}{n} ;$$

ou bien on a $n < m < A_{k+1}$, et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

PROPRIÉTÉ 3. - Pour une infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω-intéressant, plus grand que A_k et ayant $k-1$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit k tel que

$$\text{(3)} \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1} .$$

Alors, $n = 2.3. \ldots .p_{k-1}(p_k + 1)$ est ω-intéressant.

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k\, p_{k+1}/p_k$ et que, pour $k \geq 2$, d'après la propriété 2, n' est ω-intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k - 1$; si m vérifie $n < m < n'$, on a $\omega(m) \leq k - 1$; si m vérifie $n' \leq m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n},$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres, on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1},$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraîne la relation (3) pour k assez grand.

Remarque 1. - Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < p_k/(k-1)$ il est facile de voir qu'il n'existe aucun nombre ω-intéressant compris entre A_k et $n' = A_k\, p_{k+1}/p_k$. Cette situation se produit pour une infinité de k. On peut donc conjecturer que, pour une infinité de k, les nombres ω-intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) = k$.

Remarque 2. - Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leq n = A_k(1 + 1/p_k)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante : Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \ldots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geq r$ (cf. [Lan]).

Considérons le produit $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1}\, p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1}\, p_k + t$. Alors le nombre $n = 2.3. \ldots .p_{k-2}(p_{k-1}\, p_k + t_q)$ a $k-1$ facteurs premiers, et l'on a $n \leq A_k(1 + p_{k-2}/p_k\, p_{k-1})$. Le résultat de RAMACHANDRA (cf. [Ramac]) "Si $r^{3/2} \leq u \leq r^{\log \log r}$, on a $P(u, r) > r^{1+2^{\lambda}}$ avec $\lambda = -(8 + \frac{\log u}{\log r})$ " permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leq A_k(1 + 1/p_k^{1+\alpha})$. On peut prendre $\alpha = 0{,}000974$.

PROPRIÉTÉ 4. - Soit n un nombre ω-intéressant, $n \geq (k-1)\, A_k$. Alors $\omega(n) \geq k$. Cela entraîne qu'un nombre ω-intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. - Soit $n \geq (k-1)\, A_k$ vérifiant $\omega(n) \leq k - 1$; on écrit

$$A_k(t-1) \leq n < A_k\, t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geq k$. Ce nombre n ne peut pas être ω-intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k\, t} \leq \frac{\omega(A_k\, t)}{A_k\, t}.$$

Conjecture. - Peut-on remplacer $n \geqslant (k-1)\,A_k$ par $n \geqslant (1+\varepsilon(k))\,A_k$ avec $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω-intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω-largement composés : Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω-largement composés non ω-intéressants (exemple : $n = (p_{k+1} - 1)\,A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

5. Démonstration du théorème 4.

PROPOSITION 3. - Posons $N_k(x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x \; ; \; \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a, lorsque $x \longrightarrow +\infty$ (avec les notations de l'introduction),

$$N_{[\alpha \log\log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}\,\alpha^{1/2+\{\alpha \log\log x\}}\,\frac{x(1 + O(1/\log\log x)}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha\log\alpha}\sqrt{\log\log x}}) ,$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y.

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable (en remplaçant $\frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}$ par $\frac{F(\alpha)}{1-\alpha}$) pour estimer $\operatorname{card}\{n \leqslant x \; ; \; \omega(n) \leqslant \alpha \log\log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. DELANGE). - Soit $P_x(z) = \sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{P_x(z)}{(z-1)\,z^{k+1}}\,dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de SELBERG (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{zF(z)\,x(\log x)^{z-1}}{(z-1)\,z^{k+1}}\,dz + R_1(x)$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{O(x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2})}{(z-1)\,z^{k+1}}\,dz = O\Big(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1)\,r^k}\Big) .$$

On pose $\frac{zF(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe pour $z \neq 1$, et l'on a

$$G(z) = G(r) + (z-r)\,G'(r) + (z-r)^2\,H(z, r) ,$$

où $H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. On pose $\log\log x = \ell$. On obtient

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{2i\pi\log x}\int_\gamma \frac{xG(z)\,e^{z\ell}}{z^{k+1}} + R_1(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi\log x}\Big(\int_\gamma \frac{xG(r)\,e^{z\ell}}{z^{k+1}}\,dz + \int_\gamma \frac{x(z-r)\,e^{z\ell}\,G'(r)}{z^{k+1}}\,dz\Big) + R_1(x) + R_2(x) \\ &= \frac{x}{\log x}\,G(r)\,\frac{\ell^k}{k!} + \frac{x}{\log x}\,G'(r)\Big(\frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\ell^k}{k!}\Big) + R_1(x) + R_2(x) . \end{aligned}$$

On choisit $r = k/\ell$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\aleph} \frac{x(z-r)^2 \, H(z, r) \, e^{z\ell}}{z^{k+1}} \, dz .$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$, on a $|z - r|^2 \, |e^{z\ell}| = 2r^2(1 - \cos\theta) \, e^{r\ell \cos\theta}$. On peut montrer que, lorsque $\alpha \to +\infty$, on a

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) \, e^{\alpha\cos\theta} \, d\theta = O(e^{\alpha} \alpha^{-3/2})$$

(cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\ell}}{\ell^{3/2} r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x} G(r) \frac{\ell^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{r\ell}}{\ell^{3/2} r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x(\log x)^{r-2}}{(r-1) \, r^k}\right) .$$

On prend $k = [\alpha \log\log x]$, de sorte que $r = \frac{k}{\ell} = \alpha + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)$. On a donc $G(r) = G(\alpha)\left(1 + O\left(\frac{1}{\ell}\right)\right)$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling : $k! \sim k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$), et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \frac{k}{\ell} < 1$.

PROPOSITION 4. - Soit $(n_0, A) = 1$. Alors on a, avec $d(n) = \sum_{d|n} 1$,

(i) $$\sum_{n \equiv n_0 (\mathrm{mod}\ A), n \leq x} d(n) \leq \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x}$$

(ii) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 (\mathrm{mod}\ A), n \leq x, \\ \omega(n) \geq \alpha \log\log x}} 1 \leq \frac{1}{(\log x)^{\alpha \log 2}} \left(\frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x}\right) .$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\frac{x}{A}\left(1/(\log x)^{\alpha \log 2 - 1}\right)\right)$ lorsque $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. - La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i) : Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geq \alpha \log\log x$ vérifient $d(n) \geq 2^{\omega(n)}$, soit $d(n) \geq (\log x)^{\alpha \log 2}$.

On a

$$\sum_{n \equiv n_0 (\mathrm{mod}\ A), n \leq x} d(n) \leq \sum_{n \equiv n_0 (\mathrm{mod}\ A), n \leq x} \sum_{d \leq \sqrt{n}, d|n} 2 < \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 (\mathrm{mod}\ A), \\ d|n, n \leq x}} 1 .$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \pmod d$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution, et une seule, en y dans chaque intervalle de longueur d. Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) | n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d, et la somme est inférieure ou égale à

$$\sum_{d \leq \sqrt{x}} 2\left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leq 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) .$$

Remarque. - Dans le cas $A = 1$, $\alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est dû au fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x, \omega(n) \sim 2 \log \log x} d(n) \sim x \log x .$$

Par des techniques plus compliquées, il est possible d'avoir pour (ii) une majoration du même ordre en $\log x$ que celle de la proposition 3, pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

LEMME 2. - *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K. Soit $\mathcal{P}$ une partie de K, et soit L_i le nombre d'éléments de la i-ème ligne de M qui sont dans $\mathcal{P}$. Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^{m} L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathcal{P}$.*

Démonstration. - Soit C_j le nombre d'éléments de la j-ième colonne qui sont dans $\mathcal{P}$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 \geq n - \sum_{j=1}^{n} C_j = n - \sum_{i=1}^{m} L_i .$$

PROPOSITION 5. - *Supposons qu'il existe $k > 0$ et $j < n$ tels que*

(i) $k \leq \omega(n)$,

(ii) $\omega(n) \leq j$,

(iii) $\omega(n - r) \geq j$ *pour* $r = 1, 2, \ldots, j - 1$,

(iv) $\omega(n + s) \leq k$ *pour* $s = 1, 2, \ldots, [2 \log n]$.

Alors, pour n assez grand, n est un point d'étranglement pour la fonction $n \longmapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. - Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leq n - j$ et, d'après (ii),

$$m - \omega(m) < n - j \leq n - \omega(n) .$$

Ou bien on a $m = n - r$ avec $1 \leq r \leq j - 1$, et (iii) et (ii) donnent

$$m - \omega(m) \leq m - j \leq m - \omega(n) < n - \omega(n) .$$

Soit maintenant $m > n$.

Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et, en remarquant que pour tout entier m on a $\omega(m) \leq \frac{\log m}{\log 2} \leq \frac{3}{2} \log m$, on obtient, si n est assez grand,

$$m - \omega(m) \geq m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log(n + 2 \log n) > n > n - \omega(n)$$

par la croissance de la fonction $x \longmapsto x - \frac{3}{2} \log x$.

ou bien on a $m \leqslant n + [2 \log n]$, et (iv) donne alors

$$\omega(m) \leqslant k \leqslant \omega(n) \ ,$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n) \ .$$

<u>Démonstration du théorème</u> 4. – La méthode suivante est celle de [Erd 2].

Pour assurer les hypothèses (i) et (iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences :

$$\begin{cases} n \equiv 0 & (\bmod B_0) \\ n \equiv 1 & (\bmod B_1) \\ \vdots & \\ n \equiv j-1 & (\bmod B_{j-1}) \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers, et $B_1 , \ldots , B_{j-1}$ des produits de j nombres premiers tous distincts. On pose $A = B_0 B_1 , \ldots , B_{j-1}$. D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + yA \text{ avec } 0 \leqslant n_0 < A \text{ et } y \in \underline{N} \ .$$

On se donne x assez grand. On choisit $k = [3 \log \log x]$, $j = [6 \log \log x]$. On prend les facteurs premiers de $B_0 , \ldots , B_{j-1}$ distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc

$$\log A \leqslant 36(\log \log x)^2 \log(4 \log x) = O(\log \log x)^3 \ .$$

Maintenant, pour $1 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A , on a, pour la solution n_0 des congruences,

$$(n_0 + s , A) = 1 \text{ et } (n_0 , A) = B_0 \ .$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, où $0 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{A} - 1$, défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega(n_0 + s + yA) \quad \text{si} \quad s \neq 0 \\ &= \omega\left(\frac{n_0 + yA}{B_0}\right) \quad \text{si} \quad s = 0 \ . \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la s-ième ligne de ce tableau contient au plus

$$O\left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^{3 \log 2-1}}\right)$$

termes supérieurs à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A}(1 + o(1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\omega(n_0 + s + yA) \leqslant 3 \log \log x \quad \text{pour} \quad s = 1 , \ldots , 2[\log x]$$

$$\omega(n_0 + yA) \leqslant 6 \log \log x \qquad \text{pour} \quad s = 0 \ .$$

Pour une de ces valeurs de y , $n = n_0 + yA$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \longmapsto n - \omega(n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que, pour ε assez petit, la fonction $n \longrightarrow n - d(n)^{\varepsilon}$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraissemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que, pour $n = 2.3. \dots .p_k$, $n - (\omega(n) \log\log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a aucun point d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de point d'étranglement : La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante : Majorer le plus petit t_k tel que $\omega(n + t_k) \geqslant k$. On a évidemment $t_k \leqslant 2.3. \dots .p_k$, et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que, si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que, pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$, et même

$$m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - \exp(\log n)^{1-\varepsilon} ,$$

ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$ (On a besoin de $n - 2$, parce que $\min_{m=n+1,n+2} m - d(m) \leqslant n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet).

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme : La démonstration suivante a été proposée par D. BERNARDI et W. NARKIEWICZ.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de points d'étranglement, et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $(n_k/b , n_k/a)$ un nombre c premier à a b ; on aura alors

$$ca < n_k < cb ,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

REFERENCES

[And] ANDERSON (I.). - On primitive sequences, J. London math. Soc., t. 42, 1967, p. 137-148.

[Com] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. Tomes 1 et 2. - Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).

[Del 1] DELANGE (H.). - Sur des formules dues à A. Selberg, Bull. Sc. math., 2e série, t. 83, 1959, p. 101-111.

[Del 2] DELANGE (H.). - Sur des formules de A. Selberg, Acta Arithm., Warszawa, t. 19, 1971, p. 105-146.

[Dieu] DIEUDONNÉ (J.). - Calcul infinitésimal. - Hermann, Paris, 1968 (Collection Méthodes).

[Erd 1] ERDÖS (P.). - On the integers having exactly k prime factors, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 53-66.

[Erd 2] ERDÖS (P.). - On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian math. Soc., t. 12, 1948, p. 63-66.

[Erd 3] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Ann. of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.

[Hal 1] HALBERSTAM (H.) and RICHERT (H. E.). - Sieve methods. - London, Academic Press, 1974 (London mathematical Society Monographs, 4).

[Hal 2] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[Har] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - The normal number of prime factors of a number n , Quart J. of Math., t. 48, 1917, p. 76-92 ; "Collected papers of Ramanujan", p. 262-275. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[Kac 1] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 25, 1939, p. 206-207.

[Kac 2] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - The Gaussian law of errors in the theory of additive functions, Amer. J. Math., t. 62, 1940, p. 738-742.

[Kol] KOLESNIK (G.) and STRAUSS (E. G.). - On the distribution of integers with a given number of prime factors (à paraître).

[Land] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. - New York, Chelsea publishing Company, 1953.

[Lan] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.

[Mon] MONTGOMERY (H. L.) and VAUGHAN (R. C.). - On the large sieve, Mathematika, London, t. 20, 1973, p. 119-134.

[Nel] NELSON (C.), PENNEY (D. E.) and POMERANCE (C.). - 714 and 715 , J. recreational Mathematics, t. 7, 1974, p. 87-89.

[Nic] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres largement composés, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année, 1977/78, n° 41, 10 p. ; et Acta Arithm., Warszawa, t. 34, 1979, p. 379-390.

[Pis] PISOT (C.) and SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.

[Pra] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).

[Ramac] RAMACHANDRA (K.). - A note on numbers with a large prime factor, II, J. Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 39-48.

[Ram] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). - Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 16, 1917, p. 112-132 ; and "Collected papers". Vol. 1, p. 277-293.

[Rid] RIDOUT (D.). - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika, London, t. 4, 1957, p. 125-131.

[Roth] ROTH (K. F.) and SZEKERES (G.). - Some asymptotic formulae in the theory of partitions, Quart. J. math., Oxford, Series 2, t. 5, 1954, p. 241-259.

[Sat] SATHE (L. G.). - On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, I, II, III, IV, J. Indian math. Soc., t. 17, 1953, p. 63-141 et t. 18, 1954, p. 27-81.

[Sch] SCHMIDT (W. M.). - Approximation to algebraic numbers, Enseign. math. Genève, t. 17, 1971, p. 187-253 ; et Genève, Enseignement mathématique, 1972 (Monographies de l'Enseignement mathématique, 19).

[Sel 1] SELBERG (A.). - Note on a paper by L. G. Sathe, J. Indian math. Soc., t. 18, 1954, p. 83-87.

[Sel 2] SELBERG (A.). - On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, Arch. Math. Naturvid., t. 47, 1943, fasc. 6, p. 87-105.

[Tij] TIJDEMAN (R.). - Of the equation of Catalan. - Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 197-209.

[Tur] TURAN (P.). - On a theorem of Hardy and Ramanujan, J. London math. Soc., t. 9, 1934, p. 274-276.

[Wri] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.